

P. Mazzoldi

M. Nigro

C. Voci

Dipartimento di Fisica Galileo Galilei – Padova

ELEMENTI DI FISICA

ELETTROMAGNETISMO • ONDE

SECONDA EDIZIONE



P. Mazzoldi – M. Nigro – C. Voci
ELEMENTI DI FISICA – Elettromagnetismo · Onde – II edizione
Copyright © 2008, 2005, 2002 EdiSES s.r.l.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2012 2011 2010 2009 2008

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata



A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilare o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La casa editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.

L'Editore

Fotocomposizione: EdiSES s.r.l. – Napoli

Fotoincisione: PrintSprint – Napoli

Stampato presso la

Tipolitografia Petruzzi Corrado & Co. S.n.c.

Zona Ind. Regnano – Città di Castello (PG) – Tel. 0758511345

per conto della

EdiSES – Napoli Via Nuova San Rocco 62/A – P.co Soleado

Tel. 0817441706 0817441707 Fax 0817441705

http://www.edises.it E-mail: info@edises.it

ISBN 978 88 7959 478 3

Prefazione

Nella prefazione al primo volume, Meccanica e Termodinamica, di questi “Elementi di Fisica” abbiamo spiegato le scelte adottate nella stesura del testo, che riportiamo.

La riforma che ha portato all’istituzione della laurea triennale e della successiva laurea specialistica ha generato una revisione dei programmi e del peso, misurato in crediti, assegnato alle singole materie. Al primo livello la riduzione della durata degli studi e il taglio professionalizzante stanno comportando di fatto una compressione delle materie di base e tra queste della Fisica (fatta eccezione per i corsi della classe di Fisica), compressione che può arrivare fino ad un dimezzamento rispetto alla situazione precedente.

Non vogliamo discutere qui le conseguenze formative e culturali che la riforma può avere. Notiamo soltanto che, nelle nuove condizioni in cui deve operare, il docente di una materia istituzionale come la Fisica Generale si trova di fronte ad una scelta: ridurre il livello di presentazione per conservare il numero di argomenti che normalmente si illustravano agli studenti oppure operare un taglio di argomenti per rimanere ad un adeguato livello di presentazione, simile a quello finora adottato. Noi abbiamo optato per la seconda soluzione, che consideriamo la più valida per gli insegnamenti impartiti nelle facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali e di Ingegneria.

Abbiamo pertanto operato una revisione critica del testo, che tanto favorevolmente è stato accolto dai colleghi in questi anni, consistente in una riduzione di approfondimenti e di nozioni specifiche che erano stati pensati in vista di successivi insegnamenti di materie fisiche.

I programmi del corso di Fisica che segue l’insegnamento della Meccanica e della Termodinamica variano, a nostra conoscenza, da sede a sede a seconda dei curricula previsti per il primo livello di laurea. Perciò, come già fatto nel primo volume, abbiamo articolato la materia in due parti separabili: la prima parte è dedicata all’Elettromagnetismo e si conclude con le Onde Elettromagnetiche, la seconda all’Optica, in accordo con l’ipotesi che alcuni corsi di studio prevedano solamente lo svolgimento della prima parte. Inoltre, di vari argomenti, è data innanzi tutto una trattazione meno formale, che privilegia l’esemplificazione, rimandando a successivi paragrafi la trattazione più rigorosa. Viene lasciata in tal modo al docente la possibilità di approfondire o meno l’argomento in base al corso che insegna. Nella prima parte sono state incluse per completezza le Oscillazioni elettriche e nella seconda le Correnti alternate e le Onde meccaniche, anche se riteniamo difficile che possano essere svolte nei nuovi corsi.

È evidente che ci troviamo di fronte ad un difficile passaggio, se ci proponiamo di mantenere anche nella laurea triennale un insegnamento e un accertamento del risultato qualitativamente in linea con la nostra tradizione e nello stesso tempo vogliamo adeguarci alla logica della riforma.

Per questa nuova edizione, il testo è stato rivisto apportando tra l’altro alcuni cambiamenti derivati da suggerimenti e osservazioni di colleghi e di studenti. La nuova veste tipografica è intesa a facilitare la lettura del testo.

Con ciò intendiamo continuare a dare il nostro contributo all’impegno professionale dei docenti e agli studenti uno strumento di apprendimento conforme agli attuali curricula che sia utile per la loro formazione, oltre che per il superamento dell’esame.

Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, Cesare Voci

Padova, agosto 2008

Indice generale

ELETTROMAGNETISMO

- 1 Forza elettrostatica. Campo elettrostatico 1**
- 1.1 Cariche elettriche. Isolanti e conduttori 1
 - 1.2 Struttura elettrica della materia 4
 - 1.3 La legge di Coulomb 7
 - 1.4 Campo elettrostatico 11
 - 1.5 Campo elettrostatico prodotto da una distribuzione continua di cariche 14
 - 1.6 Linee di forza del campo elettrostatico 17
 - 1.7 Moto di una carica in un campo elettrostatico 18
 - 1.8 Determinazione della carica elementare. Esperienza di Millikan 20
 - Riepilogo 22
 - Quesiti 23
 - Problemi 23
- 2 Lavoro elettrico. Potenziale elettrostatico 27**
- 2.1 Lavoro della forza elettrica. Tensione, potenziale 27
 - 2.2 Calcolo del potenziale elettrostatico 30
 - 2.3 Energia potenziale elettrostatica 33
 - 2.4 Il campo come gradiente del potenziale 40
 - 2.5 Superficie equipotenziali 43
 - 2.6 Il rotore del campo elettrostatico 45
 - 2.7 Il dipolo elettrico 46
 - 2.8 La forza su un dipolo elettrico 47
 - Riepilogo 50
 - Quesiti 51
 - Problemi 52
- 3 La legge di Gauss 56**
- 3.1 Flusso del campo elettrostatico. Legge di Gauss 56
 - 3.2 Dimostrazione della legge di Gauss 58
 - 3.3 Alcune applicazioni e conseguenze della legge di Gauss 61
 - 3.4 La divergenza del campo elettrostatico 65
 - Riepilogo 66
 - Quesiti 67
 - Problemi 67
- 4 Conduttori. Dielettrici. Energia elettrostatica 70**
- 4.1 Conduttori in equilibrio 70
 - 4.2 Conduttore cavo. Schermo elettrostatico 73
 - 4.3 Condensatori 76
 - 4.4 Collegamento di condensatori 79
 - 4.5 Energia del campo elettrostatico 82
 - 4.6 Dielettrici. La costante dielettrica 85
 - 4.7 Polarizzazione dei dielettrici 92
 - 4.8 Equazioni generali dell'elettrostatica in presenza di dielettrici 95
 - Riepilogo 99
 - Quesiti 100
 - Problemi 101
- 5 Corrente elettrica 106**
- 5.1 Conduzione elettrica 106
 - 5.2 Corrente elettrica. Corrente elettrica stazionaria 107
 - 5.3 Legge di Ohm della conduzione elettrica 110
 - 5.4 Modello classico della conduzione elettrica 115
 - 5.5 Resistori in serie e in parallelo 117
 - 5.6 Forza elettromotrice 119
 - 5.7 Carica e scarica di un condensatore attraverso un resistore 122
 - 5.8 Corrente di spostamento 125
 - 5.9 Leggi di Kirchhoff per le reti elettriche 126

- 5.10 Alcuni circuiti particolari in corrente continua 130
- Riepilogo 134
- Quesiti 136
- Problemi 137

6 Campo magnetico. Forza magnetica 141

- 6.1 Interazione magnetica. Campo magnetico 141
- 6.2 Elettricità e magnetismo 144
- 6.3 Forza magnetica su una carica in moto 145
- 6.4 Forza magnetica su un conduttore percorso da corrente 147
- 6.5 Momenti meccanici su circuiti piani 150
- 6.6 Effetto Hall 153
- 6.7 Moto di una particella carica in un campo magnetico 155
- 6.8 Esempi di moti di particelle cariche in campo magnetico uniforme 158
- Riepilogo 163
- Quesiti 164
- Problemi 165

7 Sorgenti del campo magnetico. Legge di Ampère. Proprietà magnetiche della materia 169

- 7.1 Campo magnetico prodotto da una corrente 169
- 7.2 Calcoli di campi magnetici prodotti da circuiti particolari 171
- 7.3 Azioni elettrodinamiche tra fili percorsi da corrente 176
- 7.4 Legge di Ampère 177
- 7.5 Proprietà magnetiche della materia. Permeabilità e suscettività magnetica 182
- 7.6 Meccanismi di magnetizzazione e correnti amperiane 187
- 7.7 La legge di Gauss per il campo magnetico 190
- 7.8 Equazioni generali della magnetostatica in presenza di mezzi magnetizzati 194
- Riepilogo 196
- Quesiti 197
- Problemi 198

8 Campi elettrici e magnetici variabili nel tempo 202

- 8.1 Legge di Faraday dell'induzione elettromagnetica 203
- 8.2 Origine del campo elettrico indotto e della forza elettromotrice indotta 205
- 8.3 Applicazioni della legge di Faraday 209
- 8.4 Autoinduzione 212
- 8.5 Energia magnetica 216
- 8.6 Induzione mutua 219
- 8.7 Legge di Ampère-Maxwell 221
- 8.8 Le equazioni di Maxwell 223
- 8.9 Le equazioni di Maxwell in forma differenziale 224
- Riepilogo 227
- Quesiti 228
- Problemi 230

9 Oscillazioni elettriche. Correnti alternate 236

- 9.1 Oscillazioni elettriche 236
- 9.2 Circuiti in corrente alternata 239
- 9.3 Il circuito *RLC* in serie. Risonanza 242
- 9.4 Potenza nei circuiti a corrente alternata 245
- 9.5 Il trasformatore ideale 246
- Riepilogo 248
- Quesiti 249
- Problemi 250

10 Onde elettromagnetiche 253

- 10.1 Introduzione alle onde elettromagnetiche. Onde piane 253
- 10.2 Onde elettromagnetiche piane 256
- 10.3 Deduzione delle onde elettromagnetiche piane dalle equazioni di Maxwell 262
- 10.4 Energia di un'onda elettromagnetica piana. Vettore di Poynting 262
- 10.5 Quantità di moto di un'onda elettromagnetica piana. Pressione di radiazione 265
- 10.6 Polarizzazione dell'onda elettromagnetica piana 267
- 10.7 Radiazione elettromagnetica prodotta da un dipolo elettrico oscillante 270

- 10.8 Spettro delle onde elettromagnetiche 273
 - Riepilogo 275
 - Quesiti 276
 - Problemi 277

Guida alla risoluzione dei problemi di Elettromagnetismo. Risultati numerici 279

ONDE

11 Riflessione e rifrazione della luce 313

- 11.1 La luce. L'indice di rifrazione 313
- 11.2 Principio di Huygens-Fresnel 315
- 11.3 Le leggi della riflessione e della rifrazione 316
- 11.4 Intensità delle onde elettromagnetiche riflesse e rifratte 322
- 11.5 Polarizzazione della luce per assorbimento selettivo e per diffusione 326
- 11.6 Rifrazione anomala. Attività ottica 331
 - Riepilogo 333
 - Quesiti 334
 - Problemi 335

12 Ottica geometrica 339

- 12.1 Leggi della riflessione e della trasmissione 339
- 12.2 Definizioni e convenzioni 340
- 12.3 Specchi 342
- 12.4 Diottri 347
- 12.5 Lenti sottili 351
- 12.6 Aberrazioni 355
- 12.7 L'occhio umano 357
- 12.8 Strumenti ottici 360
 - Riepilogo 365
 - Quesiti 366
 - Problemi 367

13 Interferenza 371

- 13.1 Fenomeni d'interferenza. Sorgenti luminose coerenti 371
- 13.2 L'esperimento di Young 372
- 13.3 Interferenza della luce su lamine sottili 379
- 13.4 L'interferometro di Michelson 384

- 13.5 Onde elettromagnetiche stazionarie. Esperienza di Hertz 386
- 13.6 Interferenza di N sorgenti di onde elettromagnetiche sincrone 389
 - Riepilogo 393
 - Quesiti 394
 - Problemi 395

14 Diffrazione 398

- 14.1 Fenomeni di diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel 398
- 14.2 Diffrazione di Fraunhofer ad una fenditura rettilinea 399
- 14.3 Diffrazione prodotta da un'apertura circolare e da un disco opaco 403
- 14.4 Limite di risoluzione delle lenti 406
- 14.5 Il reticolo di diffrazione 410
- 14.6 Potere risolutivo di un reticolo di diffrazione 414
- 14.7 Spettroscopia con il reticolo di diffrazione 416
- 14.8 Diffrazione dei raggi X 419
 - Riepilogo 422
 - Quesiti 423
 - Problemi 424

15 Proprietà corpuscolari e ondulatorie della radiazione e della materia 427

- 15.1 Introduzione 427
- 15.2 Radiazione termica. Corpo nero 427
- 15.3 Legge di Planck 430
- 15.4 Effetto fotoelettrico 431
- 15.5 Effetto Compton. Produzione di coppie 434
- 15.6 Righe spettrali dell'atomo di idrogeno 436
- 15.7 Il modello dell'atomo di Bohr 438

- 15.8 Onde materiali. Relazione di de Broglie 440
- 15.9 Principio di complementarità. Principio di indeterminazione 442
 - Riepilogo 445
 - Quesiti 446
 - Problemi 447

16 Onde meccaniche **450**

- 16.1 Fenomeni ondulatori 450
- 16.2 Onde piane armoniche 452
- 16.3 Onde in una corda tesa 454
- 16.4 Propagazione dell'energia in una corda tesa 456
- 16.5 Onde sonore 458
- 16.6 Onde sonore armoniche 460
- 16.7 Effetto Doppler. Onda d'urto 464

- 16.8 Interferenza di onde sonore armoniche 467
- 16.9 Onde stazionarie in una corda tesa 470
- 16.10 Onde stazionarie in una colonna di gas 474
- 16.11 Battimenti 476
 - Riepilogo 478
 - Quesiti 479
 - Problemi 481

**Guida alla risoluzione
dei problemi di Onde.
Risultati numerici 483**

Indice analitico 498

ELETTROMAGNETISMO

capitolo 4

Conduttori. Dielettrici. Energia elettrostatica

4.1 CONDUTTORI IN EQUILIBRIO

I materiali **conduttori** sono caratterizzati dal fatto che nel loro interno sono verificate particolari condizioni per cui è possibile il moto di alcune delle cariche che li costituiscono. In conduttori come le soluzioni elettrolitiche o i gas ionizzati si hanno spostamenti di cariche di entrambi i segni, però questi materiali non sono di interesse per l'elettrostatica. La nostra attenzione è invece concentrata sui conduttori solidi, il cui esempio più tipico sono i **metalli**: in essi per ogni atomo si hanno uno o più elettroni che sono in pratica separati dal resto dell'atomo e liberi di muoversi nel conduttore. Con l'applicazione di un opportuno campo \mathbf{E} si può provocare un moto ordinato di elettroni ovvero dar luogo a una *corrente elettrica*, argomento che cominceremo a studiare nel capitolo 5. Nei fenomeni elettrostatici però le cariche sono fisse e questa condizione richiede che all'interno di un conduttore il campo debba essere nullo, figura 4.1, altrimenti ci sarebbe un moto di cariche, contrariamente all'ipotesi. Pertanto lo stato di **conduttore in equilibrio elettrostatico** è definito dalla condizione

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{all'interno}$$

Condizione di equilibrio di un conduttore

Si deve intendere che questa è una *condizione media macroscopica*. Nelle immediate vicinanze dei nuclei ci sono campi molto intensi, come abbiamo visto nell'esempio 3.2, che tengono legati gli elettroni non liberi; inoltre gli elettroni liberi non sono in quiete ma hanno un moto completamente disordinato di agitazione termica. Però in nessun istante c'è un moto ordinato in una certa direzione degli elettroni liberi rispetto agli ioni metallici fissi; si usa per questo parlare di *gas di elettroni liberi* all'interno di un conduttore.

La condizione $\mathbf{E} = 0$ ha le seguenti conseguenze che caratterizzano un conduttore in equilibrio elettrostatico:

- l'eccesso di carica elettrica in un conduttore può stare solo sulla superficie del conduttore;
- il potenziale elettrostatico è costante su tutto il conduttore;
- il campo elettrostatico in un punto delle vicinanze della superficie del conduttore è perpendicolare alla superficie e ha intensità σ/ϵ_0 , con σ densità di carica superficiale in quel punto.

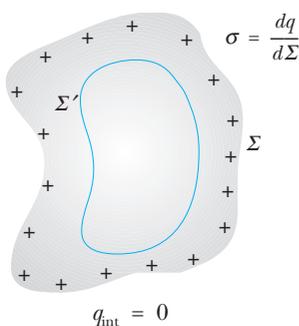


Figura 4.1
Conduttore carico.

Per la prima proprietà, se il campo elettrostatico è nullo, figura 4.1, è nullo il flusso attraverso una qualunque superficie chiusa Σ' tracciata all'interno del conduttore e quindi secondo la legge di Gauss (3.6) all'interno del conduttore non ci sono cariche ($q_{\text{int}} = 0$). Pertanto l'eccesso di carica si distribuisce sulla superficie del conduttore con densità superficiale $\sigma = dq/d\Sigma$; se si cedono al conduttore elet-

troni questi si portano sulla superficie, se si sottraggono, ne risulta carente lo strato superficiale.

Il potenziale elettrostatico risulta costante in ogni punto del conduttore perché presi due punti qualsiasi, figura 4.2:

$$V(P_2) - V(P_1) = - \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow V(P_2) = V(P_1) = V_0 .$$

Il risultato è vero anche se uno dei due punti sta sulla superficie del conduttore, che risulta quindi essere una *superficie equipotenziale*.

Dato che la superficie del conduttore è equipotenziale, il campo elettrostatico \mathbf{E} in un punto esterno molto vicino al conduttore è ortogonale alla superficie del conduttore, indipendentemente dalla forma di questo.

Il valore di E si ricava applicando la legge di Gauss ad un cilindro retto di basi $d\Sigma$ e superficie laterale di area trascurabile rispetto a $d\Sigma$, con una base contenuta all'interno del conduttore, in cui $E = 0$, e l'altra in prossimità immediata del conduttore all'esterno, dove il campo elettrostatico \mathbf{E} è normale alla superficie, figura 4.3. Detta dq la carica contenuta all'interno, sulla superficie del conduttore, si ha:

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = E d\Sigma = \frac{1}{\epsilon_0} dq = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma d\Sigma$$

e quindi:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n , \quad (4.1)$$

risultato noto come **teorema di Coulomb**. Il verso è *uscende* se la densità è *positiva*, *entrante* se è *negativa*.

Si vede che il modulo del *campo elettrostatico* è *maggiore* dove σ è *maggiore*, figura 4.4; come giustificheremo più avanti σ è maggiore dove il raggio di curvatura della superficie è minore, fatto che si verifica ad esempio in zone a forma di *punta*. Se il conduttore possiede una carica notevole la densità sulle punte è molto elevata e tale è il campo nelle immediate vicinanze; in una rappresentazione grafica le linee di forza sono molto fitte vicino alle punte. Da questo effetto hanno origine svariati fenomeni, come la formazione di scintille tra elettrodi di forma appuntita in ambiente gassoso o l'effluvio di elettroni da punte cariche negativamente, che avviene anche nel vuoto.

Un conduttore carico *lontano da altri conduttori* ha dunque una distribuzione superficiale di carica tale che il campo elettrostatico all'interno sia nullo, qualunque sia la forma del conduttore. In particolare se il conduttore è sferico la carica è distribuita uniformemente; sappiamo infatti dall'esempio 3.1 che una distribuzione superficiale sferica uniforme di carica dà campo nullo all'interno. Notiamo inoltre che la carica deve avere lo stesso segno, positivo o negativo, ovunque sulla superficie: un accumulo di elettroni soltanto in una certa zona sarebbe dovuto esclusivamente a un campo elettrico esterno che non esiste nel caso considerato.

Avvicinando un conduttore, carico o scarico, ad un altro corpo carico, ovvero introducendolo in un campo elettrico esterno \mathbf{E} , il campo elettrostatico all'interno non sarebbe più nullo, ma sarebbe dato da \mathbf{E} ; senonché questo fatto provoca un movimento di elettroni che si spostano per l'azione del campo elettrico esterno e si accumulano in una zona della superficie, lasciando sul resto della superficie un eccesso di carica positiva: tra queste zone si crea un *campo elettrostatico indotto* \mathbf{E}_i che contrasta il movimento degli elettroni e si raggiunge l'equilibrio quando $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i = 0$ in tutto l'interno del con-

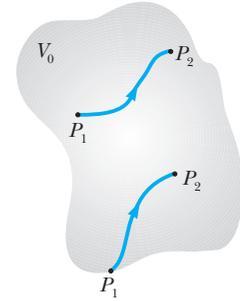


Figura 4.2

Proprietà del potenziale elettrostatico in un conduttore carico in equilibrio.

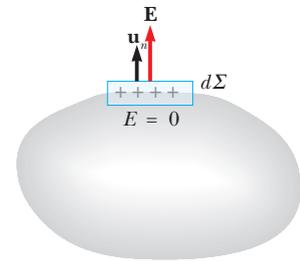


Figura 4.3

Applicazione della legge di Gauss per il calcolo del campo elettrostatico sulla superficie di un conduttore carico.

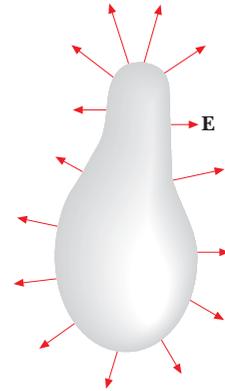


Figura 4.4

Linee di forza nell'intorno della superficie di un conduttore carico.

Carica elettrica indotta

uttore. Abbiamo così una distribuzione di *carica elettrica indotta* dei due segni sulla superficie del conduttore che si sovrappone all'eventuale carica elettrica preesistente; in totale però la carica elettrica del conduttore rimane la stessa poiché la carica elettrica indotta è la somma algebrica dei due contributi eguali ed opposti. È questa la ragione del fenomeno dell'*induzione elettrostatica* già descritto nel paragrafo 1.2.

Nella figura 4.5 sono mostrati due esempi: i conduttori sono inizialmente privi di carica (e tali restano). Nel caso (a) un conduttore a forma di lastra piana è posto tra due piani uniformemente carichi: sulle facce compare la densità uniforme di carica $\sigma_i = \epsilon_0 E_i$ eguale in modulo alla densità $\sigma = \epsilon_0 E$ dei piani, con segno tale da produrre campo elettrostatico nullo dentro la lastra (e invariato fuori dalla lastra).

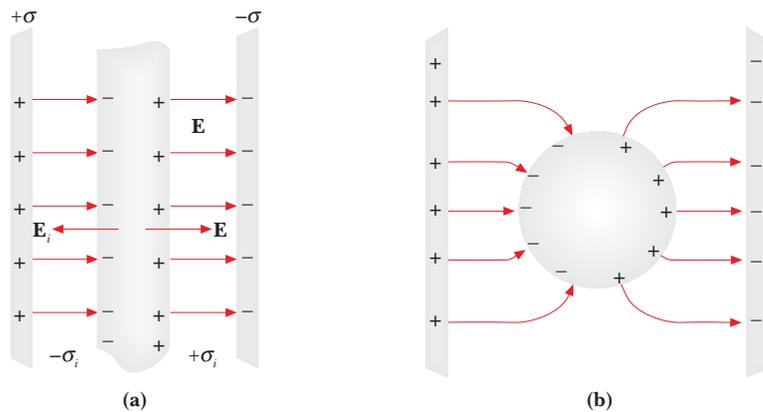


Figura 4.5

Lastra di materiale conduttore all'interno di un campo elettrostatico uniforme (a) e sfera di materiale conduttore all'interno di un campo elettrostatico uniforme (b).

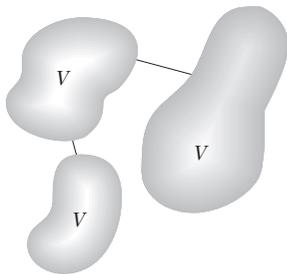


Figura 4.6

Sistema di conduttori in contatto in equilibrio.

Nel caso (b) il conduttore è sferico e la densità di carica non può essere uniforme (darebbe da sola campo elettrostatico nullo all'interno); essa deve invece essere tale da dare campo elettrostatico uniforme, pari a $-\sigma/\epsilon_0$, in tutta la sfera.

Finora abbiamo parlato di un unico conduttore. Se poniamo a contatto due o più conduttori, ad esempio collegandoli con un filo conduttore, figura 4.6, si costituisce un *unico corpo conduttore* e in equilibrio vale ovunque la condizione $\mathbf{E} = 0$, $V = \text{costante}$: **i conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale.**

ESEMPIO 4.1 Sfere conduttrici a contatto

Due sfere conduttrici, figura 4.7, di raggi rispettivamente R_1 e R_2 , sono poste a distanza molto grande rispetto a R_1 e R_2 e sono collegate tramite un filo conduttore. La carica complessiva è q . Trascurando la carica presente sul filo, calcolare: la carica q_1 e q_2 presente sulle due sfere e il rapporto tra i campi elettrostatici E_1 e E_2 sulle stesse.

Soluzione Dal testo capiamo che possiamo porre $q = q_1 + q_2$ e che le sfere sono sufficientemente lontane da poter trascurare l'induzione elettrostatica che renderebbe non uniformi le distribuzioni di carica sulla superficie. Nel paragrafo 4.1 abbiamo detto che due conduttori a contatto hanno lo stesso potenziale, per cui, utilizzando i risultati dell'esempio 3.1:

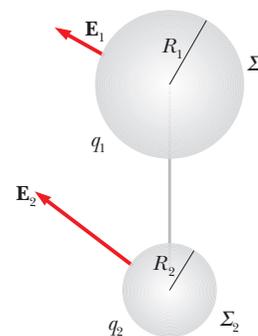


Figura 4.7

$$\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = V_1 = V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2}$$

ovvero

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_1}{R_2} \quad (4.2)$$

La carica si ripartisce tra le sfere proporzionalmente ai raggi. Ricordando che $q = q_1 + q_2$ abbiamo

$$q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} q \quad , \quad q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} q \quad .$$

La densità di carica sulle sfere vale

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2} \Rightarrow \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{R_2}{R_1} \quad , \quad (4.3)$$

utilizzando il teorema di Coulomb (4.1). Abbiamo verificato in un caso particolare l'affermazione fatta nel paragrafo 4.1 che densità di carica e campo elettrico superficiale sono maggiori dove minore è il raggio di curvatura.

4.2 CONDUTTORE CAVO. SCHERMO ELETTROSTATICO

Consideriamo un conduttore carico che abbia nel suo interno una cavità all'interno della quale non ci siano cariche elettriche, figura 4.8. Nella massa del conduttore il campo elettrostatico è nullo e pertanto è nullo il flusso attraverso qualsiasi superficie chiusa, in particolare attraverso qualsiasi superficie chiusa Σ che racchiuda la cavità: segue, per la legge di Gauss, che all'interno di Σ non ci sono cariche e quindi *sulle pareti della cavità la carica è nulla*.

Non è nemmeno possibile sulle pareti una separazione della carica in $+q$ e $-q$: per negare questa circostanza si ricorre all'altra proprietà fondamentale di \mathbf{E} , quella di essere conservativo.

Infatti, se sulle pareti della cavità fossero presenti due distribuzioni di carica di segno opposto, figura 4.9, ci sarebbero nella cavità linee di forza, uscenti dalle cariche positive e entranti in quelle negative. La circuitazione di \mathbf{E} lungo una linea chiusa, costituita da un tratto C_1 interno alla cavità su cui $\mathbf{E} \neq 0$ e da un tratto C_2 interno al conduttore dove $\mathbf{E} = 0$, darebbe

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0 \quad ,$$

in contrasto col fatto che \mathbf{E} è conservativo. Pertanto il campo nella cavità deve essere nullo se l'integrale di linea esteso a *qualsiasi percorso* C_1 interno alla cavità deve essere nullo: *sulle pareti della cavità non possono esserci cariche elettriche*. Inoltre è chiaro che il potenziale elettrostatico in un qualsiasi punto della cavità è uguale a quello del conduttore: se ci fosse una differenza di potenziale dovrebbe infatti esserci un campo elettrostatico diverso da zero.

In conclusione:

- la carica di un conduttore in equilibrio elettrostatico si distribuisce sempre e soltanto sulla superficie esterna, anche in presenza di una o più cavità all'interno del conduttore;
- il campo elettrostatico è nullo e il potenziale elettrostatico è costante in ogni punto interno alla superficie del conduttore, anche in presenza di cavità.

In particolare un conduttore sferico isolato carico di raggio R , che sia pieno o con una cavità sferica concentrica o con cavità di qualsiasi forma, ha sempre campo elettrostatico nullo all'interno e campo elettrostatico in vicinanza della superficie esterna, figura 4.11:

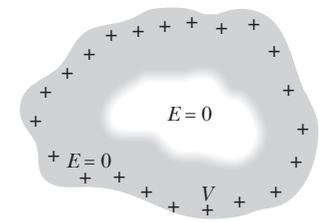


Figura 4.8

Conduttore cavo carico isolato.

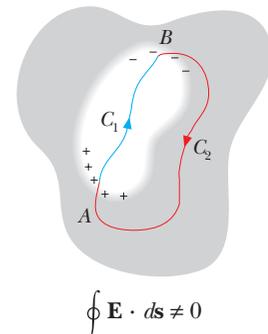


Figura 4.9

Proprietà del campo elettrostatico e del potenziale elettrostatico all'interno di un conduttore cavo.

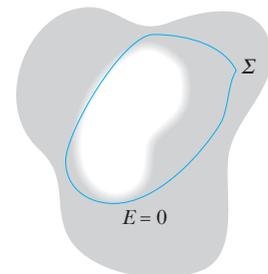


Figura 4.10

Applicazione della legge di Gauss per la verifica dell'assenza di cariche sulle pareti di una cavità.

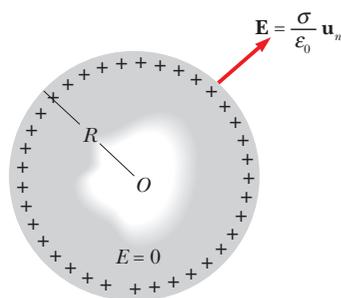


Figura 4.11

Campo elettrostatico sulla superficie di un conduttore sferico cavo carico.

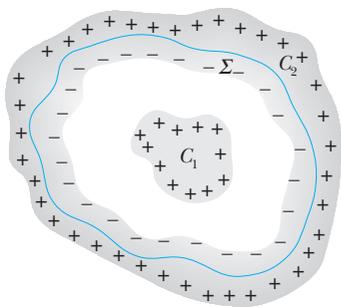


Figura 4.12

Conduttore cavo carico contenente all'interno un conduttore isolato carico.

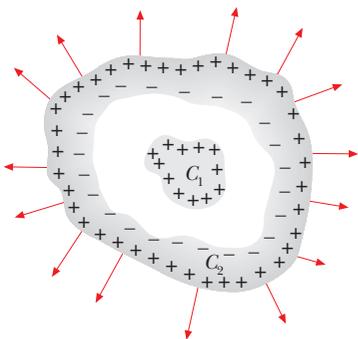


Figura 4.13

Linee di forza di un sistema di due conduttori in condizione di induzione elettrostatica completa.

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \mathbf{u}_n \quad (4.4)$$

uguale a quella di una carica puntiforme q posta nel centro O della superficie sferica.

Una osservazione importante è la seguente: la situazione descritta all'interno della cavità di un conduttore cavo non dipende dalla carica e quindi dal potenziale del conduttore. Il conduttore può essere a 10 V o a 10^6 V , ma all'interno della cavità *non si misura mai tra due punti una differenza di potenziale diversa da zero*: il punto di riferimento per il potenziale elettrostatico è la parete della cavità, rispetto a cui la differenza di potenziale è nulla, qualunque sia il valore del potenziale del conduttore.

Consideriamo adesso un conduttore C_2 cavo, isolato e privo di carica, e introduciamo un altro conduttore C_1 carico nella cavità, mantenendolo isolato da C_2 , figura 4.12. In condizioni di equilibrio, se C_1 ha sulla sua superficie esterna una carica q , una carica $-q$ risulta distribuita sulla superficie interna e una carica q sulla superficie esterna di C_2 .

Tale fatto si spiega subito con la legge di Gauss: attraverso una superficie chiusa Σ interna a C_2 e contenente la cavità il flusso di \mathbf{E} è nullo in quanto è nullo il campo stesso; di conseguenza all'interno di Σ non c'è carica e se C_1 porta la carica q , sulla superficie interna di C_2 deve necessariamente comparire una carica $-q$. Inoltre essendo C_2 neutro, lo spostamento di una carica $-q$ sulla superficie interna provoca la comparsa di una carica $+q$ sulla superficie esterna.

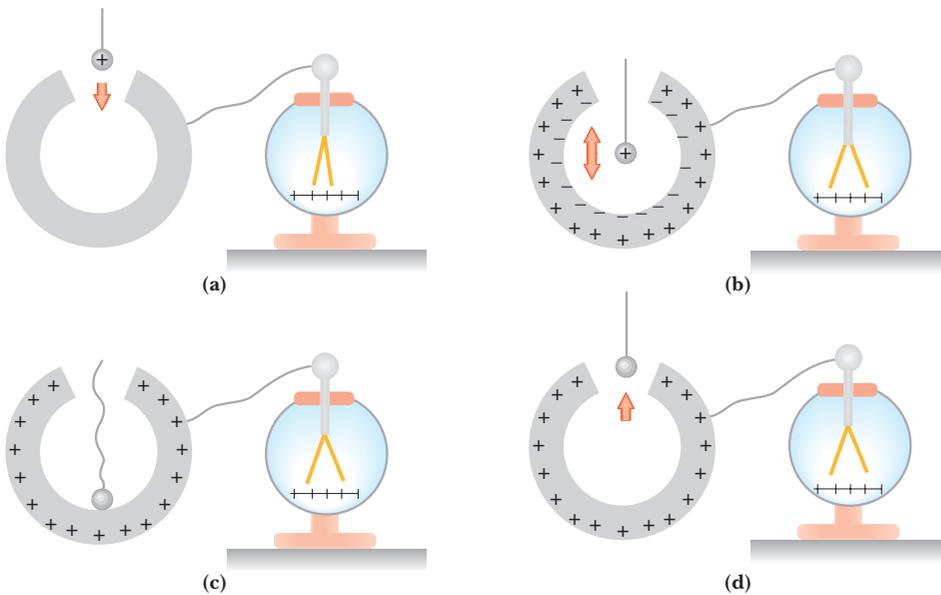
Siamo di fronte a un fenomeno di induzione che in questo caso, essendo la carica q completamente contenuta all'interno di una cavità chiusa, si chiama **induzione completa: tutte le linee di forza che partono da C_1 terminano su C_2** , figura 4.13. Dalla superficie esterna di C_2 partono altre linee di forza, il cui andamento in prossimità del conduttore riflette la distribuzione delle cariche sulla superficie stessa. Le due zone in cui esiste un campo sono separate da una zona in cui, in equilibrio, non può esistere campo elettrostatico.

Il campo elettrostatico all'interno della cavità è determinato dal valore di q , dalla posizione di C_1 e dalla forma geometrica delle due superficie affacciate. Però, fissato q , all'esterno l'effetto è sempre lo stesso, qualunque siano forma e posizione. Infatti possiamo dire che l'*informazione* sulla situazione interna potrebbe passare all'esterno solo attraverso un campo elettrostatico che penetrasse nel conduttore C_2 ; ma questo non è possibile per la proprietà dei conduttori in equilibrio di avere campo elettrostatico nullo all'interno. Al limite si può portare C_1 a contatto con C_2 , con il che le cariche $+q$ e $-q$ si elidono, ma all'esterno non cambia nulla: questo fatto, la cui verifica sperimentale vedremo tra breve, ci fa anche capire che la distribuzione della carica $-q$ sulla faccia interna di C_2 è sempre tale che, sommando l'effetto della carica q di C_1 , il campo elettrostatico dovuto alle cariche nella cavità è nullo all'esterno della cavità.

Analogamente, se variamo la carica sulla superficie esterna oppure variamo la sua distribuzione, ad esempio avvicinando al conduttore un altro corpo carico, cambia il campo elettrostatico all'esterno, ma la distribuzione di carica sulla superficie esterna di C_2 è sempre tale da dare campo elettrostatico nullo all'interno di C_2 e quindi non può alterare il campo locale esistente nella cavità. Come osservato prima, ciò potrebbe avvenire se un campo elettrostatico penetrasse dall'esterno nella massa del conduttore, ma la possibilità è esclusa dalle proprietà di un conduttore in equilibrio.

Pertanto finché lo spazio interno e lo spazio esterno non sono comunicanti:

- il conduttore cavo costituisce uno schermo elettrostatico perfetto tra spazio interno e spazio esterno.

**Figura 4.14**

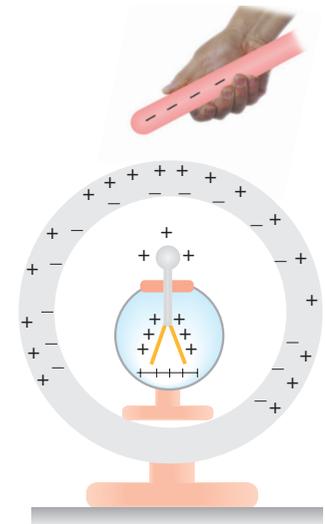
Esperimento sull'induzione completa tra due conduttori isolati.

Una verifica sperimentale dell'azione di schermo perfetto di un conduttore cavo è la seguente; si introduce, figura 4.14a, una sferetta conduttrice con carica $+q$ supportata da un filo isolante dentro una cavità conduttrice con apertura molto piccola e si misura con un elettroscopio collegato alla superficie esterna la carica indotta, che risulta essere $+q$, figura 4.14b. Se muoviamo la sferetta carica all'interno della cavità, facendo variare in tal modo il campo elettrostatico all'interno e la distribuzione di carica sulla parete interna della cavità, l'elettroscopio *non segnala* alcuna variazione, nemmeno se caliamo la carica fino a toccare il fondo, figura 4.15c. Estruendo infine la sferetta, figura 4.14d, l'elettroscopio rimane carico. Successivamente poniamo un elettroscopio carico all'interno della cavità, che esternamente può essere carica o scarica e avviciniamo un corpo carico in modo da variare la distribuzione della carica esterna: si osserva che la deviazione dell'elettroscopio rimane inalterata. In effetti un conduttore cavo scherma lo spazio interno dallo spazio esterno nei due sensi.

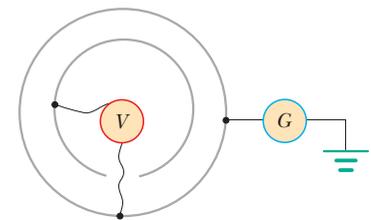
Non è necessario che lo schermo sia compatto: esso può avere delle piccole aperture o una struttura a rete; la presenza di queste discontinuità non si avverte a distanze grandi rispetto alle loro dimensioni.

Gli schermi elettrostatici trovano applicazione in laboratorio quando si devono eseguire determinate misure elettrostatiche o più in generale, quando si vuole schermare una strumentazione da disturbi elettromagnetici esterni: in effetti, anche in caso di campi variabili, si ha un'azione di schermo, pur se non completamente efficiente. Una rete metallica, ben collegata conduttivamente alla terra, inserita nei muri di un edificio lo scherma dalle scariche atmosferiche.

È interessante ricordare che l'azione di schermo elettrostatico venne scoperta da Franklin nel 1755 e completamente verificata da Faraday nella prima metà dell'ottocento; già nel 1773, dodici anni prima che venisse effettuato l'esperimento di Coulomb, Cavendish dedusse dalle proprietà di schermo sperimentate in laboratorio che l'esponente della legge, detta poi di Coulomb, doveva essere $n = 2 \pm 0.02$. In effetti gli esperimenti di precisione per la misura dell'esponente di r nella legge di Coulomb continuano a basarsi sulla verifica dell'azione di schermo elettrostatico, come mostrato in figura 4.16. Si fa variare tramite un generatore G il potenziale del conduttore esterno cavo e si misura la differenza di potenziale tra

**Figura 4.15**

Elettroscopio carico all'interno di una cavità schermata dalle perturbazioni elettriche esterne.

**Figura 4.16**

Schema di un esperimento per la determinazione precisa dell'esponente della distanza r della legge di Coulomb.

il conduttore esterno e quello interno, che deve rimanere costante durante la prova. Dagli scostamenti di V dalla costanza si deducono gli scostamenti da 2 dell'esponente n di r . Gli esperimenti più recenti (1971) danno $n - 2 = (2.7 \pm 3.1) \cdot 10^{-16}$, migliorando notevolmente il risultato di Cavendish sopra citato, $n - 2 \approx 2 \cdot 10^{-2}$, e quello di Maxwell (1873), $n - 2 \approx 10^{-5}$, ottenuti con lo stesso metodo.

4.3 CONDENSATORI

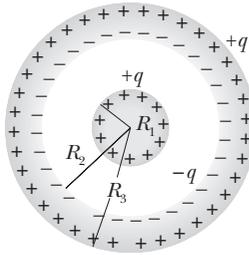


Figura 4.17

Condensatore sferico.

Consideriamo il sistema costituito da un conduttore sferico di raggio R_1 al centro di un conduttore sferico cavo di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3 , figura 4.17. Se $+q$ è la carica depositata sul conduttore interno, $-q$ è quella che deve esistere, in equilibrio, sulla superficie interna della cavità, affinché all'interno del conduttore cavo il campo elettrostatico risulti nullo; una carica $+q$ è naturalmente presente sulla superficie esterna del conduttore cavo. Il campo elettrostatico all'interno della cavità $E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ è determinato dalle cariche presenti sulle superficie che la delimitano; la differenza di potenziale tra i conduttori è

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

che riscritta come

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (4.5)$$

mostra che il rapporto tra carica e differenza di potenziale dei due conduttori sferici concentrici è indipendente dalla carica ed è determinato esclusivamente dalla geometria del sistema e dal mezzo contenuto nell'intercapedine tra i raggi R_1 e R_2 , in questo caso il vuoto caratterizzato da ϵ_0 .

Un sistema come quello descritto, costituito da due conduttori tra i quali c'è induzione completa, si chiama **condensatore**; i due conduttori prendono il nome di *armature del condensatore*. Si definisce **capacità del condensatore**:

$$C = \frac{q}{\Delta V}, \quad (4.6)$$

dove $\pm q$ è la carica presente sulle due armature e ΔV la differenza di potenziale tra le stesse.

Gli esempi seguenti mostreranno che la capacità di un condensatore è individuata in ogni caso dalla forma delle armature e dalla loro distanza.

Riscriviamo la (4.6) nelle tre maniere possibili, tutte di uso comune:

$$C = \frac{q}{\Delta V}, \quad q = C \Delta V, \quad \Delta V = \frac{q}{C}.$$

UNITÀ DI MISURA

L'unità di misura della **capacità** di un conduttore è il coulomb/volt, che prende il nome di **farad**, simbolo F:

$$F = \frac{C}{V}.$$

Condensatore
Capacità del condensatore

farad

Si tratta di una unità di misura molto grande, come vedremo. Nella pratica si usano i sottomultipli:

| | |
|------------|-----------------------|
| millifarad | mF = 10^{-3} F |
| microfarad | μ F = 10^{-6} F |
| nanofarad | nF = 10^{-9} F |
| picofarad | pF = 10^{-12} F |

In base alla (4.5) la costante dielettrica del vuoto definita da (1.4) $\epsilon_0 = 8.86 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$, viene espressa più comunemente come $\epsilon_0 = 8.86 \text{ pF/m}$ ($\text{C}^2/\text{Nm}^2 = \text{F/m}$).

ESEMPIO 4.2 Capacità di un condensatore sferico

Abbiamo già visto che la capacità di un condensatore sferico è

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (4.5)$$

Se si fa tendere $R_2 \rightarrow \infty$ si ottiene

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_1 \quad (4.7)$$

che può essere definita come *capacità di un conduttore sferico isolato*. Si può in generale definire *un conduttore isolato come un condensatore con un'armatura posta all'infinito*. Se il conduttore ha una carica $+q$, la carica $-q$ si forma per induzione all'infinito, distribuita su una superficie infinita e perciò con densità nulla.

In tal senso la presenza della seconda armatura ha come risultato l'aumento della capacità del sistema, che va attribuito all'aumento dell'influenza tra le due armature.

Possiamo vedere quantitativamente tale effetto così: se la distanza tra le due armature sferiche diventa piccola rispetto ai raggi, cioè se

$$h = R_2 - R_1 \ll R_1 \approx R_2 = R,$$

la capacità del condensatore si scrive

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (4.8)$$

con $\Sigma = 4\pi R^2$ area delle armature. La capacità cresce all'aumentare di Σ e al diminuire di h .

Per fissare un ordine di grandezza, se $\Sigma = 1 \text{ m}^2$ e $h = 1 \text{ mm}$, la capacità del condensatore sferico ($R = 0.282 \text{ m}$) è

$$C_1 = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1}{10^{-3}} = 8.85 \cdot 10^{-9} \text{ F} = 8.85 \text{ nF}.$$

La capacità di una sfera isolata di raggio $R = 0.282 \text{ m}$ è

$$C_2 = 4\pi\epsilon_0 R = 3.13 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 31.3 \text{ pF} = 3.5 \cdot 10^{-3} C_1.$$

ESEMPIO 4.3 Capacità di un condensatore cilindrico

Le armature di un condensatore cilindrico sono due porzioni di superficie cilindriche coassiali, una di raggio R_1 e l'altra di raggio $R_2 > R_1$, di eguale lunghezza d grande rispetto ai raggi. Si realizza così un'ulteriore situazione di conduttore all'interno di un altro conduttore cavo, con induzione approssimativamente completa. Se si escludono i tratti estremi, nell'intercapedine cilindrica tra R_1 e R_2 il campo elettrostatico è radiale, secondo (3.18),

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \mathbf{u}_r,$$

e la differenza di potenziale tra le armature, esempio 3.19, è

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}.$$

La carica per unità di lunghezza λ è pari a q/d e quindi

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 d}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (4.9)$$

Se $h = R_2 - R_1$ è molto minore dei raggi, sviluppiamo in serie il denominatore arrendoci al primo termine,

$$\ln \frac{R_2}{R_1} = \ln \left(1 + \frac{R_2 - R_1}{R_1} \right) = \frac{R_2 - R_1}{R_1} = \frac{h}{R},$$

per cui la capacità diventa

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 d R}{h} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} \quad (4.10)$$

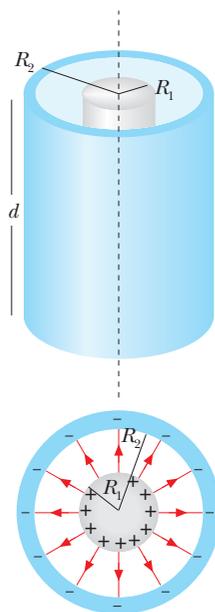


Figura 4.18

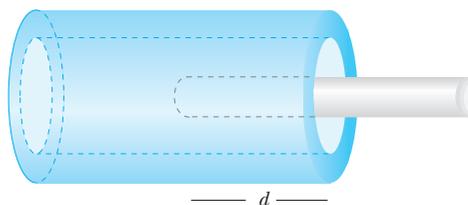


Figura 4.19

con $\Sigma = 2\pi R d$ area delle armature distanti h : si ritrova la (4.8).
Dalla (4.9) si definisce la *capacità per unità di lunghezza*

$$C_d = \frac{C}{d} = \frac{2\pi \epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (4.11)$$

Si realizza un condensatore cilindrico a capacità variabile facendo scorrere uno dei due cilindri lungo l'asse in modo da far variare la lunghezza d . Le formule restano valide se si possono trascurare gli effetti di bordo.

ESEMPIO 4.4 Capacità di un condensatore piano

Le armature di un condensatore piano sono costituite da due conduttori piani paralleli, di area Σ e distanti h , figura 4.20. La carica positiva q è distribuita con densità uniforme σ sull'armatura positiva e quella negativa $-q$ con densità uniforme $-\sigma$ sull'armatura negativa. Abbiamo già calcolato campo e potenziale per una tale distribuzione di cariche negli esempi 1.8 e 2.8, supponendo la struttura indefinita:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n, \quad V_1 - V_2 = E h = \frac{\sigma}{\epsilon_0} h = \frac{\sigma \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} h = \frac{q}{\epsilon_0 \Sigma} h.$$

Si deduce quindi che la capacità di un condensatore piano è data da

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}, \quad (4.12)$$

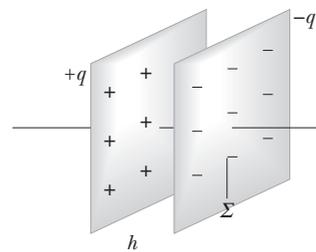


Figura 4.20

coincidente con (4.8) e (4.11). Questa volta non ci sono approssimazioni geometriche, però la (4.12) è approssimata per un'altra ragione: il campo si può supporre uniforme solo nella regione centrale del condensatore, lontano dai bordi.

ESEMPIO 4.5 Il campo elettrico dell'atmosfera terrestre

Il campo elettrostatico in condizioni di bel tempo sulla superficie terrestre è in media $E_{\text{terra}} \approx 100 \text{ V/m}$, diretto verso la terra. Un modello fenomenologico per spiegare l'origine di questo campo elettrostatico consiste nel pensare la superficie terrestre come l'armatura inferiore di un condensatore sferico carico negativamente in cui l'altra armatura, consistente in una distribuzione di carica positiva, si trova a circa $h = 5 \text{ km}$ di

distanza dalla superficie della terra. Calcolare la capacità C del condensatore e la carica q presente sulle armature.

Soluzione La densità di carica e la carica presenti sulla terra si ricavano dal teorema di Coulomb (4.1):

$$\sigma = -\epsilon_0 E_{\text{terra}} = -8.86 \cdot 10^{-10} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}, \quad q = -\sigma 4\pi R_{\text{terra}}^2 = -4.56 \cdot 10^5 \text{ C}.$$

Per il calcolo della capacità del condensatore sferico utilizziamo la (4.8) in quanto $h/R_{\text{terra}} \approx 7.8 \cdot 10^{-4}$:

$$C = \epsilon_0 \frac{4\pi R_{\text{terra}}^2}{h} = 0.9 \text{ F} .$$

La differenza di potenziale è quindi:

$$\Delta V = \frac{q}{C} \approx 500 \text{ kV} ,$$

peraltro deducibile direttamente da $\Delta V = Eh = 500 \text{ kV}$, poiché l'uso di $C = \epsilon_0 \Sigma / h$ implica che il campo elettrostatico sia costante.

Le configurazioni regolari del campo \mathbf{E} , considerate nel condensatore cilindrico e nel condensatore piano, non sono completamente realizzabili nella pratica. Esse sarebbero corrette se l'estensione fosse indefinita; per una dimensione finita si avrebbe, nella zona del bordo, un passaggio brusco dalla regione in cui esiste un campo elettrico regolare alla regione con campo elettrico nullo e sarebbe possibile trovare una linea chiusa, come quella mostrata in figura 4.21, tale che

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0 .$$

Essendo il campo elettrostatico conservativo, questa possibilità va esclusa e in effetti il campo \mathbf{E} è regolare solo nella zona centrale del condensatore, mentre vicino ai bordi le linee di forza sono deformate ed escono all'esterno, assumendo una configurazione che assicura la nullità della circuitazione del campo elettrostatico; il valore del campo è ad ogni modo rapidamente decrescente verso l'esterno, figura 4.22.

D'altra parte sono dovuti alla presenza del **campo elettrostatico disperso** alcuni effetti fisici osservati, quali ad esempio il risucchio di una lastra di isolante all'interno di un condensatore piano, mostrato nella figura 4.38 dell'esempio 4.13.

Si capisce che la configurazione sferica sarebbe l'unica ideale, per l'assenza dei bordi. Le capacità reali di condensatori cilindrici e piani differiscono dal valore calcolabile con le espressioni (4.9) e (4.12). Tuttavia queste vengono sempre usate per avere un'indicazione dei valori in gioco, tanto più vicina alla situazione reale quanto più ci si pone nella condizione $\Sigma \gg h^2$ (dimensioni delle armature grandi rispetto alla loro distanza) per la quale l'effetto di bordo è sostanzialmente trascurabile.

4.4 COLLEGAMENTO DI CONDENSATORI

Un condensatore viene utilizzato essenzialmente come deposito di carica; pur essendo la carica totale nulla, essa è separata nella quantità $+q$ e $-q$, proporzionali per un conduttore di data capacità alla differenza di potenziale tra le armature. Tramite opportuni collegamenti conduttivi esterni è possibile far fluire la carica negativa (elettroni) da un'armatura all'altra, generando una corrente elettrica che scarica il condensatore. Vedremo questo argomento nel capitolo 5. Possiamo però subito descrivere come si collegano con fili conduttori più condensatori tra loro e calcolare la capacità equivalente. Noi supponiamo costanti nel tempo le cariche e le differenze di potenziale, però i risultati sono validi anche in regime variabile.

Per comodità scriviamo V la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ che esiste tra le armature; inoltre con la lettera C indichiamo sia il condensatore che la sua capacità. Nella figura a fianco è mostrato il *simbolo* che individua un *condensatore* in un circuito elettrico: esso si rifà chiaramente al condensatore piano, che è la configurazione di gran lunga più comune, però è valido per qualsiasi condensatore.

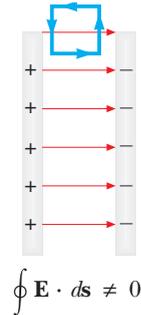


Figura 4.21

Dimostrazione dell'esistenza del campo elettrostatico disperso sui bordi di un condensatore piano di dimensioni finite.

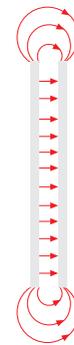


Figura 4.22

Linee di forza di un condensatore piano.



Simbolo del condensatore

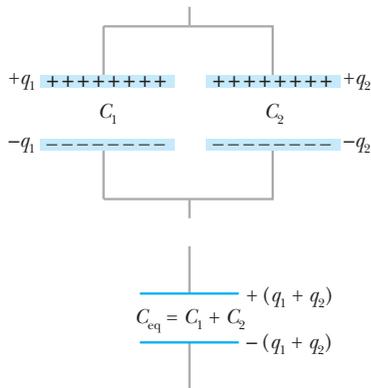


Figura 4.23

Capacità equivalente di due condensatori collegati in parallelo.

Condensatori in parallelo

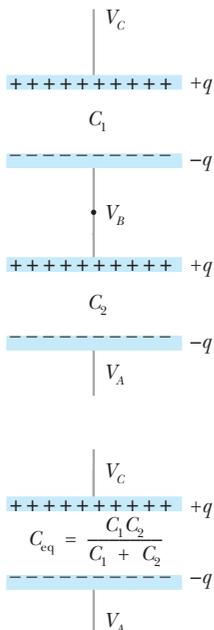


Figura 4.24

Capacità equivalente di due condensatori collegati in serie.

Condensatori in parallelo

La connessione in parallelo delle armature consiste nel realizzare, come mostrato in figura 4.23, due soli conduttori. In tal modo, essendo ciascun conduttore equipotenziale, la d.d.p. applicata al condensatore C_1 è eguale a quella applicata al condensatore C_2 e scriviamo, da (4.14),

$$q_1 = C_1 V \quad , \quad q_2 = C_2 V .$$

La carica globale sul conduttore superiore, costituito dalle due armature superiori è

$$q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2) V ;$$

sul conduttore inferiore la carica è $-q = -(q_1 + q_2)$. Definiamo capacità equivalente del sistema

$$C_{\text{eq}} = \frac{q}{V} = C_1 + C_2 . \quad (4.13)$$

Due condensatori in parallelo si comportano come un unico condensatore la cui capacità è data dalla somma delle capacità dei componenti.

Il ragionamento si estende a n condensatori:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n : \quad (4.14)$$

in un sistema di condensatori in parallelo ai capi di ciascuno c'è la stessa differenza di potenziale e la capacità equivalente è somma delle singole capacità.

La capacità equivalente è dunque sempre maggiore di quella di ciascun componente.

Collegamento in serie

Nella connessione in serie, figura 4.24, c'è un solo collegamento tra i due condensatori e viene costituito un sistema composto da tre conduttori: ai due estremi si applica la differenza di potenziale $V = V_C - V_A$ e il conduttore intermedio assume un potenziale V_B . Se $+q$ è la carica sull'armatura di C_1 a potenziale V_C , per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura affacciata e $+q$ sull'armatura di C_2 a questa collegata, dovendo essere il conduttore centrale neutro; sempre per induzione compare la carica $-q$ sull'armatura di C_2 a potenziale V_A . Vediamo che il valore della carica è lo stesso nei due condensatori. Dalla (4.6)

$$V_C - V_B = \frac{q}{C_1} \quad , \quad V_B - V_A = \frac{q}{C_2} ,$$

$$V = V_C - V_A = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C_{\text{eq}}}$$

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad , \quad C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} . \quad (4.15)$$

Il ragionamento si estende a n condensatori:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (4.16)$$

Condensatori in serie

in un sistema di condensatori in serie la carica è la stessa su ciascuno, l'inverso della capacità equivalente è somma degli inversi delle singole capacità.

La capacità equivalente è sempre minore di quella di ciascun componente.

Ci si rende conto che da un insieme di condensatori di valori dati con opportuni collegamenti in parallelo o in serie è possibile ottenere capacità equivalenti in un grande intervallo di valori.

ESEMPIO 4.6 Partitore capacitivo

Ai capi di tre condensatori in serie, figura 4.25, c'è una d.d.p. $V = V_B - V_A = 100 \text{ V}$ e la capacità equivalente del sistema è $C = 100 \text{ pF}$. Calcolare i valori delle capacità C_1 , C_2 , C_3 tali che rispetto a V_A sia $V_1 = 50 \text{ V}$ e $V_2 = 70 \text{ V}$.

Soluzione La carica che si trova su ciascuna armatura è

$$q = C V = 100 \cdot 10^{-12} \cdot 10^2 = 10^{-8} \text{ C}$$

e i valori richiesti delle capacità sono

$$C_1 = \frac{q}{V_1 - V_A} = \frac{10^{-8}}{50} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 200 \text{ pF} ,$$

$$C_2 = \frac{q}{V_2 - V_1} = \frac{10^{-8}}{20} = 5 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 500 \text{ pF} ,$$

$$C_3 = \frac{q}{V_B - V_2} = \frac{10^{-8}}{30} = 3.33 \cdot 10^{-10} \text{ F} = 333 \text{ pF} .$$

Il sistema si chiama *partitore capacitivo* perché permette di ripartire una data d.d.p. (in tre parti nel caso specifico). In generale, detti C_i e V_i i valori della capacità e della d.d.p. ai capi dell' i -esimo condensatore, dall'eguaglianza

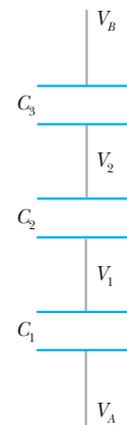


Figura 4.25

$$C_1 V_1 = C_2 V_2 = \dots = C_i V_i = \dots = C_n V_n$$

si vede che la d.d.p. si ripartisce in maniera inversamente proporzionale alla capacità:

$$V_1 : V_2 : \dots : V_n = \frac{1}{C_1} : \frac{1}{C_2} : \dots : \frac{1}{C_n} .$$

ESEMPIO 4.7 Due condensatori in parallelo

Due condensatori di capacità C_1 e C_2 hanno un'armatura a terra e sono caricati con d.d.p. V_1 e V_2 , figura 4.26. Si collegano tra loro le due armature libere e il sistema assume una nuova condizione di equilibrio con una d.d.p. V rispetto alla terra. Calcolare il valore di V .

Soluzione La carica presente inizialmente nei due condensatori è

$$q_1 = C_1 V_1 \quad , \quad q_2 = C_2 V_2$$

e la somma rimane la stessa anche nella nuova situazione,

$$q = (C_1 + C_2) V = q_1 + q_2 = C_1 V_1 + C_2 V_2 ,$$

da cui si ricava

$$V = \frac{C_1 V_1 + C_2 V_2}{C_1 + C_2} ,$$

intermedio tra V_1 e V_2 .

L'equilibrio viene raggiunto con un passaggio di carica positiva dall'armatura a potenziale maggiore a quella a potenziale minore e le cariche finali dei condensatori sono

$$q'_1 = C_1 V = \frac{C_1}{C_1 + C_2} q \quad , \quad q'_2 = C_2 V = \frac{C_2}{C_1 + C_2} q .$$

Si osservi che la ripartizione di carica tra i due condensatori avviene nello stesso modo dell'esempio 4.1, relativo a due sfere conduttrici messe in contatto, se si ricorda l'espressione (4.7) della capacità di un conduttore sferico isolato.

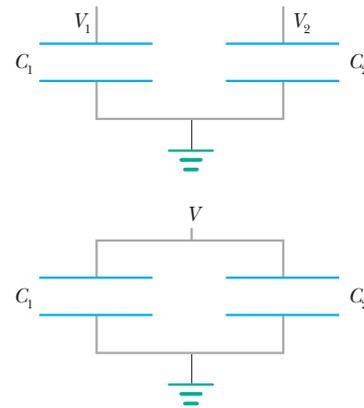


Figura 4.26

4.5 ENERGIA DEL CAMPO ELETTROSTATICO

Il *processo di carica* di un condensatore, in cui si passa dalla situazione di carica zero sulle armature alla situazione $(+q, -q)$ con una differenza di potenziale $V=q/C$ tra le armature, consiste in definitiva in una *separazione di cariche* e richiede un determinato lavoro che, essendo il campo elettrostatico conservativo, dipende soltanto dallo stato iniziale e dallo stato finale, ma non dalle modalità con cui avviene il processo. Per eseguire il calcolo possiamo immaginare quindi che la carica di un condensatore avvenga sottraendo, tramite un agente esterno, una carica dq dall'armatura negativa e portandola sull'armatura positiva, così che alla fine una carica $+q$ è stata trasferita da un'armatura all'altra, lasciando la prima con una carica $-q$, e si è stabilita tra le armature la differenza di potenziale V ; la *carica totale è in ogni istante nulla*.

Se in una fase intermedia del processo la differenza di potenziale tra le armature è V' , in quanto è già stata trasferita la carica $q' = C V'$ il lavoro per spostare l'ulteriore carica dq' attraverso la differenza di potenziale V' è, secondo (2.8),

$$dW = V' dq' = \frac{q'}{C} dq'$$

e quindi il lavoro complessivo per effettuare la separazione delle cariche è

$$W = \int dW = \int_0^q \frac{q'}{C} dq' = \frac{q^2}{2C} .$$

Come si vede, esso dipende solo dalla carica trasportata e dalla capacità del condensatore e non contiene informazioni sul processo effettivo.

Questo lavoro, effettuato contro la forza elettrostatica che si oppone a un accumulo di cariche dello stesso segno, viene immagazzinato nel sistema sotto forma di **energia** (potenziale) **elettrostatica**. Assumendo che l'energia sia nulla quando $q = 0$, abbiamo $W = U_e$ e, servendoci delle (4.6), scriviamo tre espressioni equivalenti per l'energia elettrostatica del condensatore di capacità C , carico con carica q e differenza di potenziale V :

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} q V . \quad (4.17)$$

Alle stesse espressioni si arriva per l'energia elettrostatica di un conduttore carico isolato immaginando il processo di carica come un trasporto di carica dall'infinito, dove $V=0$, alla superficie del conduttore. Ciò torna formalmente con l'idea di considerare un conduttore isolato come un condensatore con un'armatura all'infinito.

Il ragionamento svolto per il calcolo dell'energia del condensatore lega l'energia alle cariche, che la possiedono in quanto si trovano ad un certo potenziale: l'energia totale è la somma delle energie potenziali delle singole cariche. È però possibile trovare un'espressione alternativa dell'energia, legata al campo elettrostatico prodotto dal sistema di cariche piuttosto che alle sorgenti del campo stesso.

Consideriamo per semplicità un condensatore piano, in cui il campo elettrostatico tra le armature è uniforme, figura 4.27. Riprendiamo la (4.12) e la relazione $V = Eh$:

$$U_e = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} E^2 h^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma h = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \tau$$

essendo $\tau = \Sigma h$ il volume del condensatore, cioè il volume in cui è definito il campo elettrostatico. Se facciamo l'ipotesi che l'energia elettrostatica sia distribuita nei punti in cui c'è campo elettrostatico e che questa distribuzione sia uniforme come il campo, possiamo dire che la **densità di energia elettrostatica**, ovvero l'energia elettrostatica per unità di volume, è

$$u_e = \frac{U_e}{\tau} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad (4.18)$$

che risulta pertanto **proporzionale al quadrato del campo elettrostatico**.

La generalità di questa formula, in cui non compare alcun elemento caratteristico del sistema per cui il calcolo è stato eseguito, ma soltanto il valore del campo e una proprietà del mezzo (in questo caso il vuoto), suggerisce che (4.18) si possa applicare a qualsiasi situazione. In effetti si può dimostrare che in una regione in cui è definito un campo elettrostatico l'energia contenuta in ogni volume infinitesimo $d\tau$, al cui interno il campo elettrostatico vale E , figura 4.28, è

$$dU_e = u_e d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau ;$$

l'energia totale del campo elettrostatico si ottiene integrando su tutto il volume in cui il campo elettrostatico è diverso da zero:

$$U_e = \int dU_e = \int \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau . \quad (4.19)$$

Questa energia corrisponde al lavoro speso per costruire la distribuzione di cariche che dà origine al campo elettrostatico.

Le (4.18) e (4.19) valgono per qualsiasi campo elettrico, indipendentemente dalla sua natura. Utilizzeremo la (4.18) nel paragrafo 10.4 relativamente al campo elettrico di un'onda elettromagnetica.

Nel SI l'unità di misura della densità di energia elettrostatica è joule/m³ (J/m³).

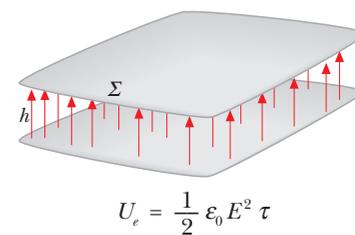


Figura 4.27

Energia elettrostatica immagazzinata all'interno di un condensatore carico.

Densità di energia elettrostatica

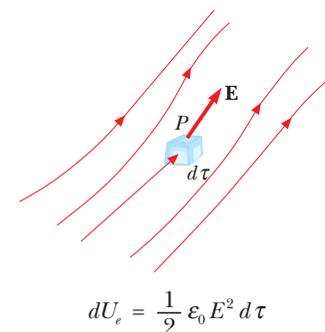


Figura 4.28

Energia elettrostatica nell'intorno di un punto.

ESEMPIO 4.8 Energia elettrostatica di un condensatore sferico

Calcolare l'energia elettrostatica di un condensatore sferico di raggi R_1 e R_2 .

Soluzione Impostiamo il calcolo sulla (4.19) utilizzando quanto visto nell'esempio 4.2: il campo tra le armature del

condensatore vale $E = q/4\pi\epsilon_0 r^2$; il volume della cortecchia sferica infinitesima compresa tra il raggio r e il raggio $r + dr$ è $d\tau = \Sigma dr = 4\pi r^2 dr$ e pertanto

$$U_e = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^2}$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (4.20)$$

Ricordando che la capacità di un condensatore sferico è data da (4.5), vediamo che (4.20) è pari a $q^2/2C$: quindi (4.19) e (4.17) portano allo stesso risultato.

Se facciamo tendere $R_2 \rightarrow \infty$, in modo da realizzare un conduttore sferico di raggio R_1 dalla (4.20) otteniamo

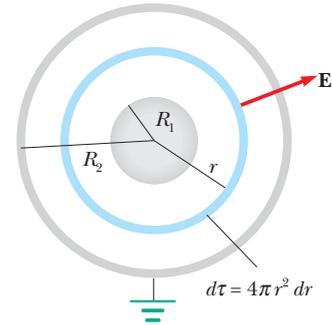


Figura 4.29

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$$

con $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$, come dato dalla (4.7).

ESEMPIO 4.9 Energia elettrostatica di due condensatori in parallelo

Riprendendo i condensatori dell'esempio 4.6 calcolare l'energia elettrostatica prima e dopo il collegamento in parallelo.

Soluzione Le energie elettrostatiche iniziale e finale sono

$$U_{e, \text{in}} = \frac{1}{2} q_1 V_1 + \frac{1}{2} q_2 V_2, \quad U_{e, \text{fin}} = \frac{1}{2} (q_1 + q_2) V$$

per cui la variazione di energia elettrostatica vale

$$\Delta U_e = U_{e, \text{fin}} - U_{e, \text{in}} = \frac{1}{2} q_1 (V - V_1) + \frac{1}{2} q_2 (V - V_2).$$

Ricorriamo all'espressione del potenziale finale trovata nell'esempio 4.6 e troviamo

$$\Delta U_e = \frac{1}{2} \frac{V_1 - V_2}{C_1 + C_2} (q_2 C_1 - q_1 C_2).$$

Siccome

$$V_1 - V_2 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_1 C_2 - q_2 C_1}{C_1 C_2}$$

si ha infine

$$\Delta U_e = -\frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} (V_1 - V_2)^2.$$

L'energia elettrostatica finale è minore di quella iniziale; evidentemente lo spostamento delle cariche richiede un lavoro e l'energia elettrostatica diminuisce.

ESEMPIO 4.10 La pressione elettrostatica

Calcolare la forza tra due armature di un condensatore piano, di area Σ distanti h , carico con una carica q , e il rapporto F/Σ , detto *pressione elettrostatica*.

Soluzione L'energia elettrostatica di un condensatore piano con armature di area Σ distanti h è:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} h.$$

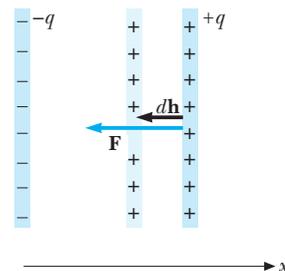


Figura 4.30

Tra le armature, cariche di segno opposto, si esercita una forza F attrattiva che per ragioni di simmetria è parallela a \mathbf{E} .

Per uno spostamento $d\mathbf{h}$ dell'armatura positiva ($dh < 0$) indicato in figura 4.30 l'energia elettrostatica diminuisce di

$$dU_e = \frac{q^2}{2\epsilon_0 \Sigma} dh = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma dh$$

e viene fornito dalla forza \mathbf{F} il lavoro

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{h} = -dU_e = -\frac{q^2}{2\epsilon_0} \Sigma dh > 0$$

positivo, per cui la forza \mathbf{F} è concorde a $d\mathbf{h}$ e vale:

$$F = -\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma \quad (4.21)$$

Esprimendo σ in funzione del campo elettrostatico E abbiamo in modulo:

$$F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \Sigma = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \Sigma$$

e la forza per unità di superficie risulta

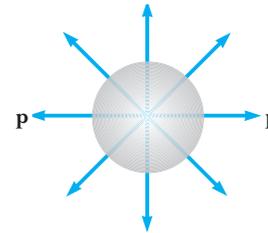


Figura 4.31

$$p = \frac{F}{\Sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2, \quad (4.22)$$

detta **pressione elettrostatica**.

La (4.22), che *non contiene* elementi caratteristici del sistema, ha validità generale, qualsiasi sia la distribuzione di carica superficiale e mostra che la *pressione elettrostatica ha la stessa espressione della densità di energia*. Essa è valida anche per un conduttore sferico isolato carico, come ad esempio una bolla d'acqua saponata che sia stata caricata. Se la densità σ è abbastanza grande, la pressione elettrostatica (che deriva da una forza repulsiva essendo le cariche dello stesso segno) tenderà a dilatare la superficie della bolla, aumentandone il raggio fino a distruggerla, indipendentemente dal segno della carica superficiale, in quanto la forza dipende da σ^2 .

4.6 DIELETTICI. LA COSTANTE DIELETTICA

Nei paragrafi precedenti sono state descritte le proprietà dei conduttori in equilibrio: esse possono essere riassunte dicendo che la carica di un conduttore si distribuisce sempre sulla sua superficie in modo tale che il campo elettrostatico generato da essa e da altre cariche eventualmente presenti sia nullo all'interno del conduttore. Questo è dunque equipotenziale e il valore del potenziale elettrostatico dipende dalla distribuzione di tutte le cariche presenti. La carica di un conduttore può essere facilmente cambiata, dando origine a una nuova situazione elettrostatica, sfruttando il fatto che è molto semplice cedergli o sottrargli carica (elettroni) attraverso il contatto con altri corpi carichi o il collegamento con generatori.

Vogliamo adesso studiare come viene modificato il campo elettrostatico nello spazio tra conduttori carichi quando questo viene parzialmente o totalmente riempito con un **materiale isolante**, di cui abbiamo già parlato nel paragrafo 1.1, e quali fenomeni avvengono all'interno di un materiale isolante sottoposto ad un campo elettrostatico.

Cominciamo con l'esaminare una situazione semplice, un condensatore piano carico e isolato, in modo che la carica sulle armature resti costante, figura 4.32a. Se q_0 è il valore della carica, distribuita con densità uniforme σ_0 , tra le armature c'è un campo elettrostatico E_0 e una d.d.p. V_0 dati da

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}, \quad V_0 = \frac{q_0}{C_0} = E_0 h;$$

C_0 è la capacità e h la distanza tra le armature.

Isolanti

Introduciamo parallelamente alle armature e senza toccarle una lastra conduttrice di spessore $s < h$, figura 4.32b: si osserva che la differenza di potenziale tra le armature diminuisce (come è messo in evidenza ad esempio dalla diminuzione dell'angolo tra le foglie di un elettroscopio connesso in parallelo al condensatore o da qualsiasi altro strumento elettrostatico che misura la differenza di potenziale). Infatti sulle facce della lastra si formano, per induzione elettrostatica completa, due distribuzioni di densità σ_0 con segno tale da annullare il campo all'interno della lastra; all'esterno invece il campo resta invariato e pertanto

$$V = E_0 (h - s) < V_0 ,$$

indipendentemente dalla posizione della lastra. La presenza della carica indotta sulle facce della lastra può essere messa in evidenza toccando una faccia con una sferetta conduttrice di prova sostenuta da un manico isolante e portando la sferetta a contatto con un elettroscopio; in tal modo si può anche verificare che sulle due facce della lastra le cariche hanno segno opposto.

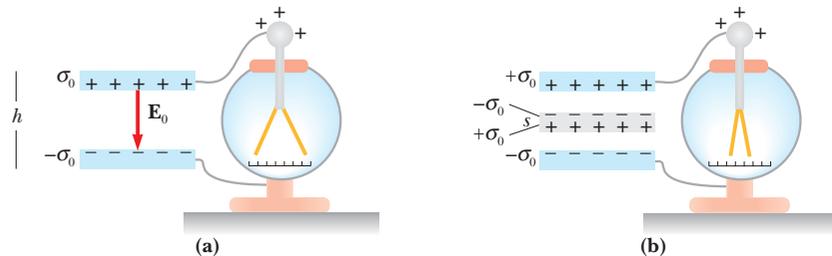


Figura 4.32

Schema di un esperimento per lo studio delle proprietà elettriche dei materiali conduttori.

Ripetiamo l'esperimento con una lastra di materiale isolante, figura 4.33a, definito nel paragrafo 1.1 come un materiale in cui la carica prodotta localmente per strofinio non è libera di muoversi. La differenza di potenziale tra le armature diminuisce e l'effetto, a parità di spessore s , è *minore di quello rilevato con la lastra di conduttore*. Un esame dello stato di carica delle facce dell'isolante, fatto con la sferetta di prova, *non segnala la presenza di carica elettrica libera*. La differenza di potenziale diminuisce linearmente all'aumentare dello spessore s della lastra, come dimostreremo nell'esempio 4.10 e assume il *valore minimo* V_k quando tutto lo spazio tra le armature è riempito da materiale isolante, figura 4.33b. Il contatto tra la lastra di isolante e le armature del condensatore non produce alcun effetto dal momento che sulle facce della lastra non si è formata carica libera.

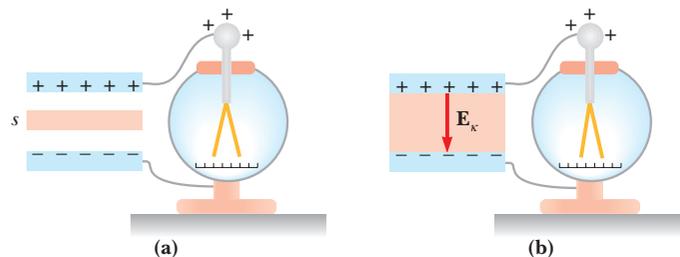


Figura 4.33

Schema di un esperimento per lo studio delle proprietà elettriche dei materiali isolanti.

Una serie di esperienze di carattere sistematico, come quelle condotte da Faraday nel 1831, mostra che il rapporto tra la differenza di potenziale V_0 misurata con il condensatore vuoto e la differenza di potenziale V_κ misurata con il condensatore completamente riempito di isolante è sempre maggiore di 1 e dipende soltanto dal tipo di materiale, ma non dalla carica sulle armature o dalle dimensioni e forma delle stesse.

Le sostanze isolanti che hanno questa proprietà di ridurre la differenza di potenziale tra le armature, e quindi il campo elettrico, si chiamano anche *sostanze dielettriche* o *dielettrici* e il rapporto adimensionale

$$\kappa = \frac{V_0}{V_\kappa} > 1 \quad (4.23)$$

Costante dielettrica relativa

è detto **costante dielettrica relativa del dielettrico**.

Ritornando al condensatore piano riempito completamente di dielettrico, figura 4.33b, il campo elettrostatico all'interno (nell'ipotesi che resti uniforme) deve valere

$$E_\kappa = \frac{V_\kappa}{h} = \frac{V_0}{\kappa h} = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0}, \quad (4.24)$$

pertanto ridotto dello stesso fattore κ . La variazione del campo dovuta alla presenza del dielettrico è

$$E_0 - E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\chi}{1 + \chi} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}$$

definendo

$$\chi = \kappa - 1 \quad (4.25)$$

Suscettività elettrica

una grandezza chiamata **suscettività elettrica del dielettrico**. Per il campo nel dielettrico possiamo dunque scrivere

$$E_\kappa = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \quad (4.26)$$

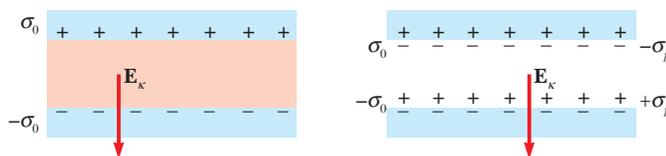


Figura 4.34

Densità di carica σ_p sulle superficie di una lastra di materiale isolante.

ponendo

$$\sigma_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma_0. \quad (4.27)$$

La (4.26) mostra che il campo elettrostatico all'interno del dielettrico ha la stessa espressione di un campo nel vuoto risultante dalla sovrapposizione del

campo dovuto alle cariche libere sulle armature e del campo di una distribuzione uniforme di carica con densità σ_p che immaginiamo depositata sulle facce della lastra dielettrica, con segno opposto a quello della carica libera sull'armatura contigua. Come vedremo nel paragrafo 4.7 queste cariche non sono fittizie, bensì sono il risultato dei processi microscopici che avvengono all'interno del dielettrico sotto l'azione del campo esterno.

Una relazione come (4.27) esiste tra la carica $q_p = \sigma_p \Sigma$ che si forma sulle superficie del dielettrico e la carica q depositata sulle armature:

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q . \quad (4.28)$$

La **capacità del condensatore** pieno di dielettrico è

Capacità del condensatore con dielettrico

$$C_\kappa = \frac{q_0}{V_\kappa} = \kappa \frac{q_0}{V_0} = \kappa C_0 , \quad (4.29)$$

aumentata dello stesso fattore κ di cui è diminuita la differenza di potenziale ai capi del condensatore, in accordo col fatto che la carica è rimasta costante. Allo stesso modo di (4.23) si trova che (4.29) è una relazione di carattere generale che vale qualunque sia la forma del condensatore. Deduciamo allora che le formule (4.5), (4.9), (4.12), date per un condensatore sferico, cilindrico, piano, restano valide purché si sostituisca a ϵ_0 la grandezza

Costante dielettrica assoluta del dielettrico

$$\epsilon = \kappa \epsilon_0 , \quad (4.30)$$

detta **costante dielettrica assoluta del dielettrico**. In particolare, per il condensatore piano, scriviamo esplicitamente

$$C_\kappa = \kappa C_0 = \frac{\kappa \epsilon_0 \Sigma}{h} = \frac{\epsilon \Sigma}{h} . \quad (4.31)$$

Notiamo che il vuoto può essere assimilato, per queste formule, a un dielettrico con costante dielettrica assoluta ϵ_0 , costante dielettrica relativa $\kappa = 1$ e suscettività elettrica $\chi = 0$.

Il ragionamento che nel paragrafo 4.5 ha portato all'espressione dell'energia elettrostatica di un condensatore piano caricato con carica q può essere ripetuto anche se lo spazio tra le armature è riempito completamente da un dielettrico di costante dielettrica relativa κ , con il risultato

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{\sigma^2 \Sigma^2}{2\epsilon \Sigma/h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \Sigma h , \quad (4.32)$$

avendo utilizzato la (4.24) per il campo E all'interno del dielettrico.

Vediamo le stesse possibilità di interpretazione a suo tempo discusse: da una parte l'energia è legata alle cariche, dall'altra al campo elettrico. Ora abbiamo in più la dipendenza dalle proprietà del dielettrico che riempie lo spazio in cui esiste il campo E . La quantità

Densità di energia elettrostatica

$$u_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (4.33)$$

rappresenta la **densità di energia elettrostatica**.

Pure adesso la formula (4.33) è di validità generale: in una regione in cui esiste campo elettrostatico l'**energia elettrostatica** è distribuita con densità (4.33) e vale:

$$U_e = \int_{\tau} u_e d\tau = \int_{\tau} \frac{1}{2} \varepsilon E^2 d\tau . \quad (4.34)$$

Energia elettrostatica

In particolare, nel caso di condensatori sferici e cilindrici completamente riempiti di dielettrico, il campo elettrico che compare nelle (4.33) e (4.34) è, analogamente a quanto avviene per il condensatore piano, relazione (4.24), diminuito di un fattore κ rispetto al vuoto e ha le espressioni

$$E(r) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \kappa r^2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon r^2} \quad \text{condensatore sferico}$$

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 \kappa r} = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon r} \quad \text{condensatore cilindrico}$$

dove r è la distanza dal centro o dall'asse, rispettivamente.

Nella tabella 4.1 sono riportati i valori della costante dielettrica relativa per alcuni materiali sottoposti, a temperatura ambiente, ad un campo elettrostatico costante. È anche riportata la **rigidità dielettrica**, cioè il massimo valore del campo elettrostatico che può essere applicato a un dielettrico senza che avvengano scariche al suo interno; una scarica danneggia irreparabilmente il dielettrico, nel senso che viene a mancare la sua proprietà isolante.

Rigidità dielettrica

TABELLA 4.1 Costanti dielettriche relative e rigidità dielettriche

| Sostanza | Costante dielettrica relativa κ | Rigidità dielettrica V/m |
|------------------------|---|-----------------------------|
| aria | 1.00059 | $3 \cdot 10^6$ |
| acqua | 80 | — |
| alcool etilico | 28 | — |
| olio per trasformatori | 2.5 | $20 \cdot 10^6$ |
| ambra | 2.7 | $90 \cdot 10^6$ |
| bachelite | 4.9 | $24 \cdot 10^6$ |
| carta | 3.7 | $16 \cdot 10^6$ |
| polietilene | 2.3 | $50 \cdot 10^6$ |
| polistirolo | 2.6 | $25 \cdot 10^6$ |
| porcellana | 6.5 | $4 \cdot 10^6$ |
| teflon | 2.1 | $60 \cdot 10^6$ |
| vetro | $4 \div 7$ | $20 \cdot 10^6$ |

I materiali solidi che compaiono nella tabella 4.1 sono materiali *amorfi*, dotati di simmetria in tutte le direzioni (*isotropi*). Per essi, come del resto per i gas e i liquidi, la costante dielettrica κ non dipende né dal valore né dalla direzione del campo \mathbf{E} cui vengono sottoposti. *Le proprietà elettrostatiche dei dielettrici di questo tipo sono completamente descritte dalle relazioni dedotte in questo paragrafo.*

Rimandiamo al paragrafo 4.7 per l'interpretazione fisica di tali risultati, dedotti da considerazioni di carattere fenomenologico e al paragrafo 4.8 per una formulazione più puntuale delle leggi dell'elettrostatica in presenza di materiali dielettrici.

ESEMPIO 4.11 Lastra di dielettrico all'interno di un condensatore piano

Un condensatore piano, con armature di area Σ distanti h , è caricato con una carica q_0 e quindi isolato. Una lastra di dielettrico, di costante dielettrica relativa κ , area Σ e spessore s , è posta all'interno, come mostrato in figura 4.35. Calcolare la differenza di potenziale tra le armature e la capacità equivalente del sistema.

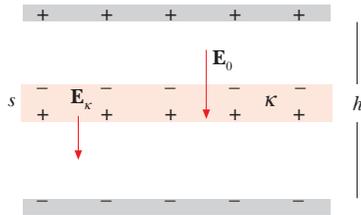


Figura 4.35

Soluzione Il campo elettrostatico all'interno del dielettrico è dovuto sia alle cariche libere, distribuite sulle armature con densità σ_0 , che a quelle che compaiono sulle facce della lastra ed ha l'espressione (4.24): $E_\kappa = \sigma_0 / \epsilon_0 \kappa$. Il campo nei punti in cui non c'è la lastra è determinato solamente dalla densità di carica libera, poiché, in base ai risultati degli esempi 1.8 e 2.8, le due distinzioni di carica $+\sigma_p$ e $-\sigma_p$ danno risultato nullo all'esterno: $E_0 = \sigma / \epsilon_0$. La differenza di potenziale è

$$V'_\kappa = \int_0^h \mathbf{E} \cdot d\mathbf{h} = E_0(h - s) + E_\kappa s,$$

qualunque sia la posizione della lastra rispetto alle armature.

Introduciamo il valore dei campi elettrostatici:

$$V'_\kappa = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0}(h - s) + \frac{\sigma_0}{\kappa \epsilon_0}s = \frac{\sigma_0 h}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{s}{h}\right) =$$

$$= V_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{s}{h}\right)$$

con variazione lineare tra V_0 ($s = 0$) e $V_\kappa = V_0 / \kappa$ ($s = h$), figura 4.36.

La d.d.p. si può riscrivere

$$V'_\kappa = \frac{\sigma_0 \Sigma}{\epsilon_0 \Sigma} \left(h - \frac{\kappa - 1}{\kappa} s\right),$$

in cui $\sigma_0 \Sigma$ è la carica libera q presente sulle armature. Pertanto

$$\frac{V'_\kappa}{q} = \frac{1}{C} = \frac{h - s}{\epsilon_0 \Sigma} + \frac{s}{\epsilon_0 \kappa \Sigma},$$

dove C è la *capacità equivalente* del condensatore parzialmente riempito di dielettrico. Si vede dalla formula che la capacità equivalente non dipende dalla posizione della lastra e che il sistema si può interpretare come due condensatori in serie, uno vuoto con capacità $\epsilon_0 \Sigma / (h - s)$, l'altro con dielettrico, di capacità $\epsilon_0 \kappa \Sigma / s$.

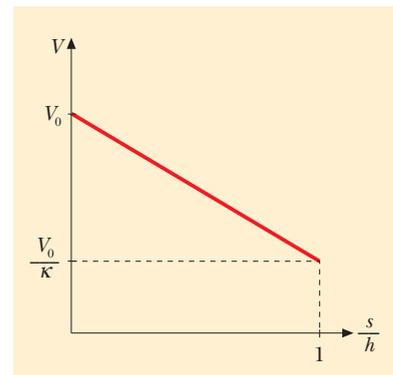


Figura 4.36

ESEMPIO 4.12 Lastra di dielettrico tra armature di un condensatore piano collegato ad un generatore

Un condensatore piano, con armature di area Σ distanti h , viene collegato ad un generatore che mantiene una differenza di potenziale V_0 tra le armature. Una lastra di dielettrico di costante dielettrica relativa κ viene inserita tra le armature, riempiendo completamente il volume, figura 4.37. Descrivere le proprietà elettrostatiche del sistema prima e dopo l'inserimento della lastra, ammettendo che anche in questo caso la capacità aumenti di un fattore κ .

Soluzione Nella condizione senza dielettrico:

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h}, \quad q_0 = C_0 V_0, \quad E_0 = \frac{V_0}{h} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0},$$

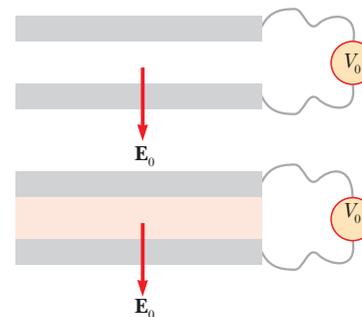


Figura 4.37

$$U_e = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \quad , \quad u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad .$$

Nella condizione con dielettrico, dato che $C = \kappa C_0$, si ha:

$$q = CV_0 = \kappa q_0 \quad , \quad \sigma = \kappa \sigma_0 \quad , \quad E = E_0 = \frac{V_0}{h} \quad ,$$

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q = (\kappa - 1) q_0 = q - q_0 \quad , \quad \sigma_p = (\kappa - 1) \sigma_0 \quad ,$$

$$U'_e = \frac{1}{2} CV_0^2 = \kappa U_e \quad , \quad u'_e = \frac{1}{2} \epsilon E_0^2 = \kappa u_e \quad .$$

ESEMPIO 4.13 Forza di risucchio di una lastra di dielettrico

In un condensatore piano, le cui armature quadrate sono di lato l e distano h , è parzialmente inserita per un tratto x una lastra di dielettrico, di costante dielettrica κ e spessore h . Un generatore mantiene la differenza di potenziale V costante tra le armature. Calcolare la forza F con cui la lastra è risucchiata all'interno del condensatore, il lavoro W complessivo fatto dalla forza F e l'energia U_{gen} erogata dal generatore durante il processo. Eseguire i calcoli per $l = 20$ cm, $h = 1$ cm, $\kappa = 4$, $V = 500$ V.

Soluzione Con riferimento alla figura 4.38 puntualizziamo che è il campo elettrostatico non uniforme in prossimità dei bordi del condensatore che produce la forza \mathbf{F} di risucchio. Tale campo agisce sulle cariche superficiali indotte sul dielettrico, che non sono distribuite uniformemente. Il processo è schematizzato come in figura 4.39; si calcola innanzitutto la capacità equivalente del sistema, pensato come due condensatori in parallelo, uno con dielettrico e uno senza dielettrico:

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 \kappa}{h} lx + \frac{\epsilon_0 l(l-x)}{h} \quad .$$

Per un avanzamento dx della lastra dielettrica la capacità aumenta di

$$dC = \frac{dC}{dx} dx = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) l}{h} dx \quad ,$$

a cui corrisponde una variazione di carica $dq = V dC$ operata dal generatore, che la sposta da un'armatura all'altra con spesa di lavoro $dW_{\text{gen}} = V dq = V^2 dC$. D'altra parte l'energia elettrostatica aumenta di $dU_e = \frac{1}{2} dC V^2 = \frac{1}{2} dW_{\text{gen}}$. Il lavoro fornito dal generatore va dunque per metà in aumento di energia elettrostatica e per metà in lavoro della *forza di risucchio*:

$$dW = F dx = dW_{\text{gen}} - dU_e = dU_e = \frac{1}{2} V^2 dC \quad ;$$

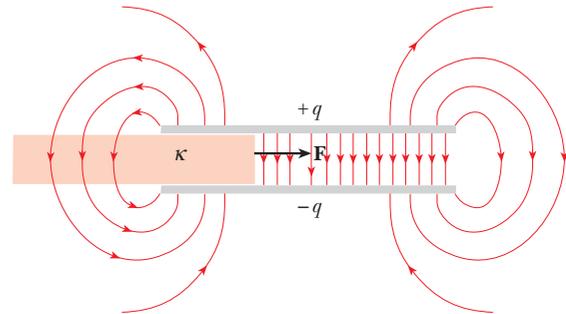


Figura 4.38

da qui si ricava:

$$F = \left(\frac{dU_e}{dx} \right)_{V=\text{cost}} = \frac{\epsilon_0 (\kappa - 1) l V^2}{2h} \quad ;$$

la forza non dipende dalla posizione x della lastra. Numericamente $F = 6.64 \cdot 10^{-5}$ N. Il lavoro complessivo della forza è $W = Fl = 1.33 \cdot 10^{-5}$ J, l'aumento di energia elettrostatica è eguale, il generatore fornisce il lavoro $U_{\text{gen}} = 2W = 2.66 \cdot 10^{-5}$ J, a spese della propria energia interna che diminuisce di una eguale quantità.

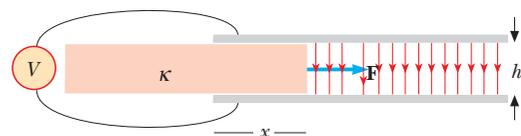


Figura 4.39

4.7 POLARIZZAZIONE DEI DIELETRICI

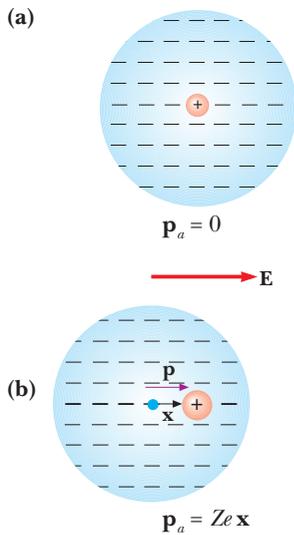


Figura 4.40

Polarizzazione di un atomo sottoposto all'azione di un campo elettrostatico.

Momento di dipolo elettrico

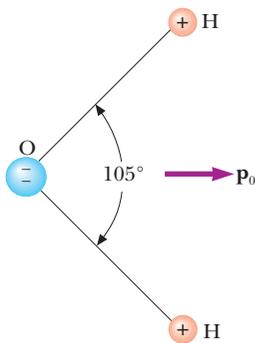


Figura 4.41

Struttura elettrica della molecola di acqua.

La spiegazione dei fenomeni osservati si basa sulla struttura elettrica microscopica della materia. Ricordiamo come il fenomeno dell'induzione elettrostatica, che rende possibile la separazione delle cariche dei due segni nei conduttori, sia dovuto al fatto che nei conduttori un certo numero di elettroni per atomo è separato dall'atomo stesso: all'interno dei conduttori esiste un *gas di elettroni* praticamente liberi.

Negli isolanti invece tutti gli elettroni sono legati agli atomi e non se ne allontanano spontaneamente. Per fare avvenire la separazione occorre agire dall'esterno, ad esempio tramite lo strofinio con un panno. Se si applica al dielettrico un campo elettrico esterno avviene soltanto uno *spostamento locale* delle cariche che costituiscono gli atomi. Si tratta di effetti molto piccoli per ogni singolo atomo: gli spostamenti delle cariche sono dell'ordine di 10^{-15} m, confrontabili con le dimensioni del nucleo. Però il numero di atomi per unità di volume è $n = 10^{25} \div 10^{28} \text{ m}^{-3}$, a seconda dello stato di aggregazione, per cui l'effetto complessivo è misurabile.

In un atomo in condizioni normali e in assenza di campo elettrico esterno la distribuzione degli elettroni è in media simmetrica rispetto al nucleo: essa viene rappresentata, figura 4.40a, come una nube di carica negativa che occupa una zona intorno al nucleo di raggio pari alle dimensioni dell'atomo ($\sim 10^{-10}$ m); il centro di massa della carica negativa coincide con il nucleo positivo.

Sotto l'azione di un campo elettrostatico \mathbf{E} , figura 4.40b, il centro (di massa) della nube negativa subisce uno spostamento in verso contrario al campo, il nucleo in senso concorde al campo e si raggiunge una posizione di equilibrio in cui questo effetto è bilanciato dall'attrazione tra le cariche di segno opposto. Detta x la distanza tra i centri delle cariche ovvero \mathbf{x} il vettore che va dal centro della carica negativa al nucleo, ha senso definire il **momento di dipolo elettrico** di questa configurazione come

$$\mathbf{p}_a = Ze \mathbf{x} .$$

Possiamo quindi affermare che un atomo acquista un *momento di dipolo elettrico microscopico* \mathbf{p}_a , indotto dal campo elettrostatico \mathbf{E} , a questo parallelo e concorde; l'effetto cessa quando si annulla il campo. Il fenomeno si chiama *polarizzazione elettronica*.

Come abbiamo accennato alla fine del paragrafo 2.7 esistono delle sostanze le cui molecole presentano un *momento di dipolo intrinseco*: si tratta di molecole poliatomiche formate da specie atomiche diverse (H_2O , NH_3) in cui la distribuzione delle cariche è tale che il centro delle cariche negative non coincide con il centro delle cariche positive, figura 4.41. In assenza di campo elettrostatico esterno, figura 4.42a, i dipoli molecolari sono orientati a caso, per via degli urti dovuti al moto di agitazione termica che distruggono eventuali configurazioni ordinate dovute alle interazioni tra dipoli. Quando si applica un campo \mathbf{E} , su ciascuno dei dipoli elettrici di momento \mathbf{p}_0 agisce il momento delle forze (2.49) che ne causa un orientamento con il campo elettrostatico soltanto parziale perché disturbato dall'agitazione termica, figura 4.42b. Il grado di allineamento aumenta al diminuire della temperatura e all'aumentare dell'intensità del campo elettrostatico esterno.

Anche questo meccanismo, che prende il nome di *polarizzazione per orientamento*, porta al risultato che ogni molecola acquista un *momento di dipolo elettrico medio* $\langle \mathbf{p} \rangle$ microscopico parallelo al campo elettrostatico \mathbf{E} , figura 4.42b.

Nella nota alla fine del capitolo 4 vengono esaminati entrambi i meccanismi di polarizzazione per i gas.

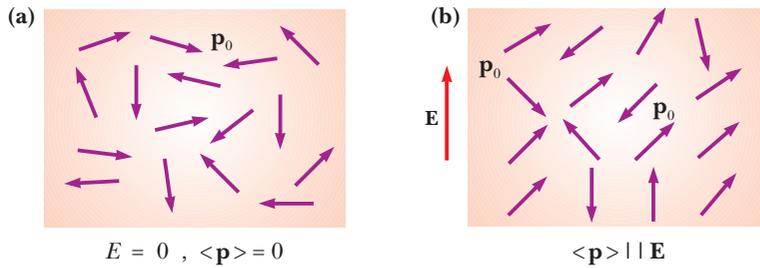


Figura 4.42

Azione del campo elettrostatico sulle molecole di una sostanza dotate di momento di dipolo elettrico intrinseco.

Senza approfondire oltre la dinamica dei meccanismi di polarizzazione, riassumiamo l'effetto dell'applicazione di un campo elettrostatico ad un dielettrico dicendo che ciascun atomo o molecola acquista un momento di dipolo elettrico medio $\langle \mathbf{p} \rangle$, parallelo e concorde a \mathbf{E} .

Considerato un volumetto τ nell'intorno di un punto O in cui sono contenuti N atomi (o molecole), il momento di dipolo risultante \mathbf{p} è dato da $\mathbf{p} = N\langle \mathbf{p} \rangle$ e il momento di dipolo per unità di volume nell'intorno del punto O si scrive

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{p}}{\tau} = \frac{N}{\tau} \langle \mathbf{p} \rangle = n \langle \mathbf{p} \rangle, \quad (4.35)$$

Vettore polarizzazione

dove n è il numero di atomi (o molecole) per unità di volume. Dato che ciascun momento di dipolo $\langle \mathbf{p} \rangle$ è parallelo al campo \mathbf{E} , anche \mathbf{P} , detto **vettore polarizzazione**, è parallelo a \mathbf{E} .

Riprendiamo in considerazione il condensatore piano carico con all'interno una lastra di dielettrico, che supponiamo *polarizzato uniformemente*: il vettore polarizzazione \mathbf{P} è cioè costante in tutti i punti della lastra.

Suddividiamo la lastra in prismi infinitesimi di base $d\Sigma_0$, altezza dh e volume $d\tau = d\Sigma_0 dh$, figura 4.43a: ciascuno di questi ha, secondo (4.35), il momento di dipolo

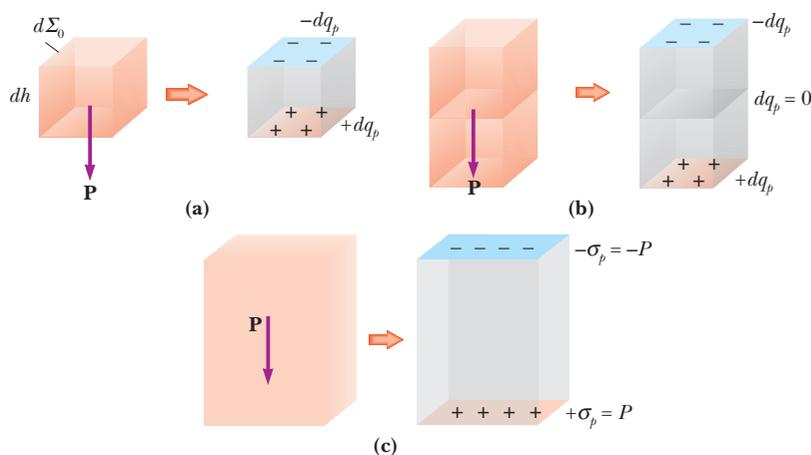


Figura 4.43

Rappresentazione schematica della formazione della carica di polarizzazione sulle superficie di una lastra piana di materiale dielettrico.

$$d\mathbf{p} = \mathbf{P} d\tau = P d\Sigma_0 d\mathbf{h} ,$$

essendo $d\mathbf{h}$ orientato concordemente a \mathbf{P} .

Sostituiamo al prisma un sistema costituito da due cariche $\pm dq_p = \pm P d\Sigma_0$, poste nel vuoto e distanti dh , distribuite sulle basi del prisma con densità $\pm\sigma_p = \pm dq_p / d\Sigma_0 = \pm P$. Tali cariche hanno un momento di dipolo $d\mathbf{p}$ eguale a quello del prisma.

Se consideriamo due prismi consecutivi, figura 4.43b, con una base in comune e se \mathbf{P} è costante, la carica $+dq_p$ di un prisma si annulla con la carica $-dq_p$ dell'altro sulla base in comune; ripetendo l'operazione per tutti i prismi alla fine rimangono solamente le cariche sulle basi dei prismi che appartengono alle facce della lastra, figura 4.43c.

Il significato fisico dell'operazione è di ammettere che avvenga una compensazione delle cariche, spostate dalle posizioni di equilibrio, all'interno del dielettrico uniformemente polarizzato, ma non alla superficie limite dove la discontinuità del mezzo impedisce la compensazione. Qui la carica è localizzata entro uno strato di spessore pari alle dimensioni atomiche ed è a tutti gli effetti trattabile come una distribuzione superficiale di carica. La lastra viene quindi ad essere equivalente a due distribuzioni di carica, localizzate sulle facce, con densità $\pm\sigma_p = \pm P$.

È bene ripetere che queste cariche di polarizzazione non sono libere come nei conduttori: esse si manifestano a causa degli spostamenti microscopici locali, ma rimangono vincolate agli atomi. Per questo motivo quando cerchiamo di prelevarne un campione non riusciamo ad asportarne nemmeno una piccola quantità misurabile. Per lo stesso motivo quando un dielettrico occupa completamente lo spazio interno a un condensatore e le facce del dielettrico vengono in più punti a contatto con le cariche libere presenti sulle armature conduttrici non avvengono trasferimenti di carica, pur essendo affacciate cariche di segno opposto.

Quando la superficie del dielettrico, come in figura (4.44), è di forma qualunque, considerato un prismetto con le basi una interna di area $d\Sigma_0$ in cui la densità di carica è ancora P e l'altra esterna di area $d\Sigma$ in cui la densità è σ_p , si ha $dq_p = P d\Sigma_0 = \sigma_p d\Sigma$ e quindi:

$$\sigma_p = P \frac{d\Sigma_0}{d\Sigma} = P \cos \theta = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n : \tag{4.36}$$

la densità superficiale delle cariche di polarizzazione è uguale alla componente di \mathbf{P} lungo la normale alla superficie.

Il caso della lastra considerata in precedenza corrisponde alle due orientazioni particolari $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. In generale, figura 4.44, quando $0 \leq \theta < \pi/2$ la densità di carica è positiva, quando $\pi/2 < \theta \leq \pi$ essa è negativa ed è nulla solo per $\theta = \pi/2$, superficie parallela a \mathbf{P} . Di conseguenza in un dielettrico polarizzato, indipendentemente dalla forma, avremo sempre una parte della superficie carica positivamente e la rimanente carica negativamente. Se la polarizzazione è uniforme non si manifestano cariche all'interno del dielettrico e quindi la carica totale superficiale deve essere nulla, come deve sempre essere una carica di polarizzazione visti i meccanismi da cui ha origine. Se invece la polarizzazione non è uniforme diciamo soltanto che pure all'interno del dielettrico si hanno cariche di polarizzazione, in quanto non si ha più la compensazione cui si è accennato prima. Però la somma delle cariche di polarizzazione superficiali e di volume è sempre nulla.

L'attrazione di piccoli oggetti isolanti, per esempio pezzetti di carta o di polistirolo, da parte di corpi carichi, come materiali dielettrici strofinati, si spiega con il fenomeno della polarizzazione: il campo elettrostatico del corpo carico polarizza l'oggetto che acquista un momento di dipolo elettrico \mathbf{p} e il segno delle cariche è

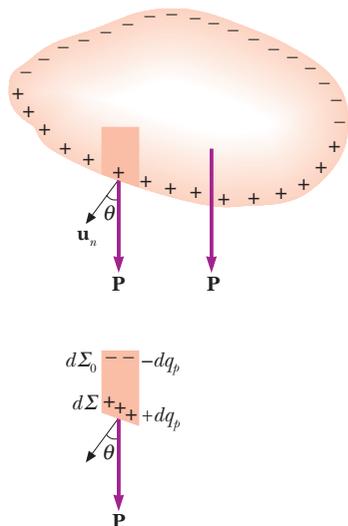


Figura 4.44

Densità di carica di polarizzazione sulla superficie di un dielettrico di forma qualunque.

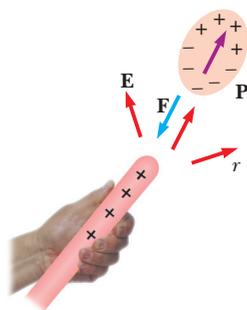


Figura 4.45

Un pezzetto di polistirolo viene attratto da una bacchetta elettrizzata.

sempre tale da causare attrazione, figura 4.45; la forza F attrattiva è data dalla (2.52) $F = p \frac{\partial E(r)}{\partial r}$, se r è la distanza.

Nella maggior parte dei dielettrici risulta che \mathbf{P} è proporzionale a \mathbf{E} e tale relazione si scrive

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} . \quad (4.37)$$

Per il dielettrico a forma di lastra uniformemente polarizzato è facile verificare la (4.37) facendo ricorso a (4.36), (4.27), (4.24).

I **dielettrici** che obbediscono a (4.37) si chiamano **lineari**; essi sono materiali amorfi, caratterizzati da *isotropia spaziale* (vedi paragrafo 4.6, Tabella 4.1).

Esistono mezzi anisotropi, come i cristalli, nei quali il parallelismo tra \mathbf{P} e \mathbf{E} è mantenuto solo lungo alcune direzioni che coincidono con gli *assi cristallografici*.

4.8

EQUAZIONI GENERALI DELL'ELETTROSTATICA IN PRESENZA DI DIELETTRICI

Avendo verificato la realtà fisica delle cariche di polarizzazione che vengono indotte da un campo elettrostatico \mathbf{E} possiamo scrivere la *legge di Gauss* (3.6), facendo apparire esplicitamente tali cariche:

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{q + q_p}{\varepsilon_0} . \quad (4.38)$$

Il flusso del campo elettrostatico attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma di *tutte le cariche presenti all'interno*, sia libere (q) che di polarizzazione (q_p).

Se consideriamo la scatola cilindrica della figura 4.46, avente area di base Σ , la carica contenuta all'interno è quella positiva sull'armatura e quella negativa di polarizzazione sulla faccia della lastra; quest'ultima vale $q_p = -\sigma_p \Sigma = -P\Sigma$. D'altra parte, essendo $P = 0$ all'interno dell'armatura conduttrice, è anche vero che per l'intera superficie chiusa cilindrica

$$\oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = P\Sigma .$$

Pertanto la (4.38) diventa

$$\Phi(\mathbf{E}) = \oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(q - \oint \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma \right)$$

ovvero

$$\oint (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = q , \quad (4.39)$$

relazione che ha validità del tutto generale.

Dalla (4.39) si può definire il vettore \mathbf{D} , detto **induzione dielettrica**,

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} , \quad (4.40)$$

per cui:

$$\Phi(\mathbf{D}) = \oint \mathbf{D} \cdot \mathbf{u}_n d\Sigma = q \quad (4.41)$$

Dielettrici lineari

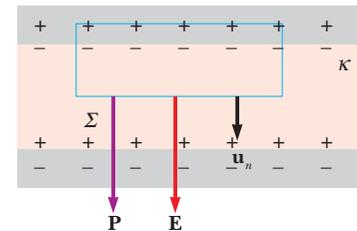


Figura 4.46

Applicazione della legge di Gauss per la definizione del vettore *induzione dielettrica* \mathbf{D} .

Induzione dielettrica

Legge di Gauss per \mathbf{D}

La (4.41), nota come **legge di Gauss per l'induzione dielettrica** afferma che

il flusso dell'induzione dielettrica attraverso una superficie chiusa è uguale alla somma delle cariche libere contenute all'interno della superficie stessa.

Introducendo (4.37) nella (4.40) abbiamo:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \kappa \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (4.42)$$

In particolare, all'interno della lastra dielettrica inserita in un condensatore piano dove il campo elettrostatico è dato da (4.24) si ha:

$$\mathbf{D} = \sigma \mathbf{u}_n .$$

Il valore di \mathbf{D} coincide con quello della densità di carica libera.

Con lo stesso procedimento applicato nel paragrafo 3.4 si ottiene la *forma locale* di (4.41):

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho . \quad (4.43)$$

La *divergenza del vettore induzione dielettrica è eguale alla densità di carica libera*; in assenza di cariche libere $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$.

Le relazioni trovate, anche se ricavate per dielettrici lineari, hanno validità generale.

UNITÀ DI MISURA

La **polarizzazione** e l'**induzione dielettrica** hanno la stessa unità di misura, che è quella della densità superficiale di carica, C/m^2 (coulomb/ m^2).

La costante dielettrica relativa e la suscettività elettrica sono adimensionali. Invece la costante dielettrica assoluta ha le dimensioni di ε_0 , che si possono ricavare da $E = \sigma/\varepsilon_0$ e risultano farad/m, F/m, unità corrispondente, ma più usata, di C^2/Nm^2 , indicata nella (1.6), come già osservato nel paragrafo 4.3.

ESEMPIO 4.14 Sfera conduttrice in un dielettrico indefinito e omogeneo

Una sfera conduttrice di raggio R , avente carica q , è all'interno di un dielettrico indefinito di costante dielettrica relativa κ . Determinare le espressioni in funzione di r dei vettori \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{P} e il valore della carica di polarizzazione q_p sulla superficie del dielettrico a contatto con la sfera.

Soluzione La legge di Gauss per il vettore \mathbf{D} (4.41), applicata ad una superficie sferica di raggio $r > R$, dà

$$4\pi r^2 D = q \rightarrow \mathbf{D}(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r .$$

Da questa tramite (4.42) si ricava il campo elettrostatico nel dielettrico:

$$\mathbf{E}(r) = \frac{\mathbf{D}}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 \kappa r^2} \mathbf{u}_r .$$

Rispetto al caso in cui la sfera sia nel vuoto ($\kappa = 1$), c'è una diminuzione di un fattore κ .

Il vettore \mathbf{P} si ottiene applicando (4.37):

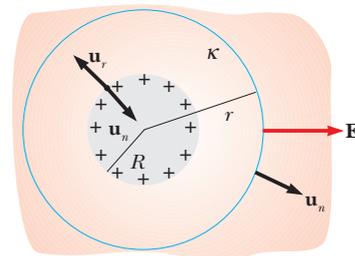


Figura 4.47

$$\mathbf{P}(r) = \varepsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi r^2} \mathbf{u}_r .$$

In particolare, per $r = R$, ovvero sulla superficie del dielettrico a contatto con la sfera, dove c'è la carica di polarizzazione di segno opposto a q ,

$$\mathbf{P}(R) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{q}{4\pi R^2} \mathbf{u}_r = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma \mathbf{u}_r, \quad \sigma_p = -P(R) = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \sigma \rightarrow q_p = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} q.$$

essendo σ la densità di carica libera. Da (4.36), visto che \mathbf{u}_n e \mathbf{u}_r sono opposti,

NOTA

MECCANISMI DI POLARIZZAZIONE NEI GAS

Nello studio delle proprietà macroscopiche dei dielettrici isotropi abbiamo ammesso la validità della legge di proporzionalità tra polarizzazione \mathbf{P} e campo elettrostatico \mathbf{E} agente sul dielettrico:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 (\kappa - 1) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}. \quad (4.37)$$

Vogliamo ora discutere brevemente i meccanismi di *polarizzazione elettronica* e di *polarizzazione per orientamento* nei gas, i sistemi più semplici, al fine di dimostrare che la (4.37) è verificata e di ottenere un'espressione della suscettività elettrica χ in termini delle grandezze relative ai processi elementari da cui dipende il fenomeno della polarizzazione.

Polarizzazione elettronica

In un gas, in condizioni normali, ci sono $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ atomi contenuti nel volume molare $\tau_A = 22.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, dunque $n = N_A / \tau_A = 2.69 \cdot 10^{25}$ atomi/ m^3 .

Ciascun atomo, per le nostre considerazioni, figura 4.48a, può essere visto come una sfera di raggio R pari alle dimensioni dell'atomo, in cui è distribuita uniformemente la carica negativa $-Ze$, con densità

$$\rho_e = -Ze / \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (4.44)$$

Al centro della distribuzione di carica negativa c'è il nucleo di carica $+Ze$: il momento di dipolo dell'atomo è nullo, $\mathbf{p}_a = 0$, poiché la carica positiva sta nel centro della distribuzione di carica negativa. Sotto l'azione del campo elettrostatico esterno \mathbf{E} , figura 4.48b, il centro della distribuzione risente della forza $\mathbf{F}_- = -Ze\mathbf{E}$ che tende ad allontanarlo dal nucleo. Alla distanza x dal centro della distribuzione, a sua volta, il nucleo risente oltre della forza $\mathbf{F}_+ = +Ze\mathbf{E}$ dovuta al campo elettrostatico esterno, anche della forza dovuta al campo elettrostatico (3.17) $\mathbf{E}_e = \frac{\rho_e \mathbf{x}}{3\varepsilon_0} = -\frac{Zex}{4\pi\varepsilon R^3 \varepsilon_0}$, dovuto alla distribuzione di carica negativa, e quindi della forza $\mathbf{F}_e = Ze\mathbf{E}_e$, diretta verso il centro della distribuzione stessa. Si avrà l'equilibrio quando:

$$\mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_e = 0, \quad \mathbf{E} + \mathbf{E}_e = 0 \quad Ze\mathbf{x} = \varepsilon_0 (4\pi\varepsilon_0) \mathbf{E}.$$

Essendo $\mathbf{p}_a = Ze\mathbf{x}$ il momento di dipolo elettrico acquistato dall'atomo, si ottiene

$$\mathbf{p}_a = \varepsilon_0 (4\pi R^3) \mathbf{E}, \quad (4.45)$$

ovvero il *momento di dipolo elettrico indotto dal campo elettrostatico \mathbf{E} è parallelo e proporzionale a \mathbf{E}* . La polarizzazione (4.35) risulta:

$$\mathbf{P} = n\mathbf{p}_a = \varepsilon_0 (4\pi R^3 n) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \chi_{el} \mathbf{E} \quad (4.46)$$

e quindi la *suscettività elettrica* (4.37) assume l'espressione

$$\chi_{el} = (4\pi R^3) n. \quad (4.47)$$

Ponendo il raggio R di un atomo pari a 10^{-10} m otteniamo:

$$\chi_{el} = n (4\pi R^3) = 3.4 \cdot 10^{-4} \rightarrow \kappa = 1 + \chi = 1.00034,$$

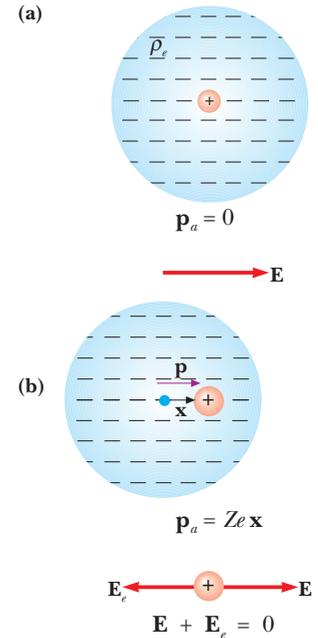


Figura 4.48

Meccanismo di polarizzazione di un atomo.

Momento di dipolo elettrico indotto

in buon accordo con i valori sperimentali per quelle sostanze come l'argon $\kappa = 1.000545$, l'azoto $\kappa = 1.000580$, l'elio $\kappa = 1.000068$, l'idrogeno $\kappa = 1.000264$, in cui il meccanismo di polarizzazione elettronica è l'unico presente.

Polarizzazione per orientamento

Alcune molecole poliatomiche, come acqua, H_2O , figura 4.49, e acido cloridrico, HCl, possiedono un momento di dipolo intrinseco \mathbf{p}_0 , per cui sono dette *polari*. Tali molecole sono formate da due o più atomi, di specie diversa, disposti secondo configurazioni in cui il centro della carica negativa non coincide con quello della carica positiva. Nella molecola d'acqua il centro della carica positiva sta praticamente nel punto di mezzo della congiungente i due atomi di idrogeno, mentre quello della carica negativa coincide quasi con il nucleo di ossigeno; ne deriva un momento di dipolo elettrico p_0 che vale circa $6 \cdot 10^{-30}$ cm.

In assenza di campo elettrico i singoli dipoli sono diretti casualmente in tutte le direzioni così che in ogni elemento di volume $d\tau$ il momento di dipolo elettrico risultante è eguale a zero e quindi la polarizzazione è nulla. Quando si applica un campo elettrico \mathbf{E} dall'esterno ha luogo la polarizzazione elettronica, ma succede anche che su ogni dipolo permanente \mathbf{p}_0 agisce il momento meccanico (2.49)

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}$$

che tende a orientare \mathbf{p}_0 concordemente a \mathbf{E} . Se tutte le molecole si allineassero risulterebbe una polarizzazione intensa; però a temperature T ordinarie e con campi elettrici non particolarmente intensi gli urti tra le molecole dovuti all'agitazione termica permettono un allineamento soltanto parziale che si rappresenta con un *momento di dipolo medio* $\langle \mathbf{p} \rangle$, parallelo ad \mathbf{E} e ad esso proporzionale.

Lo studio del comportamento statistico di un insieme di dipoli alla temperatura T e sottoposti all'azione di un campo elettrico \mathbf{E} ha permesso a P. Debye di calcolare $\langle \mathbf{p} \rangle$. Per campi elettrici normali e temperature T non troppo basse risulta

$$\langle \mathbf{p} \rangle = \frac{p_0^2}{3k_B T} \mathbf{E} , \quad (4.48)$$

con $k_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K costante di Boltzmann. Pertanto la polarizzazione (4.35) vale

$$\mathbf{P} = n \langle \mathbf{p} \rangle = \epsilon_0 \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} \mathbf{E} ; \quad (4.49)$$

anche in questo caso la (4.37) è verificata. Come era da attendersi la polarizzazione è inversamente proporzionale alla temperatura T : al crescere della temperatura gli urti tra le molecole accentuano il disallineamento rispetto al campo elettrico \mathbf{E} . Dal confronto con (4.37) si trova per la suscettività elettrica l'espressione

$$\chi_p = \frac{np_0^2}{3\epsilon_0 k_B T} . \quad (4.50)$$

La dipendenza di χ_p da $1/T$ prende il nome di *legge di Curie*. La suscettività elettrica del vapor d'acqua è stata misurata in funzione della temperatura: i dati sperimentali sono riportati in figura 4.50 e si vede che la dipendenza da $1/T$ è ben verificata. Dalla pendenza della curva si ricava $np_0^2/3\epsilon_0 k_B = 1.46$ K; noto il numero di molecole per unità di volume $n = 1.38 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$, è possibile calcolare il momento di dipolo elettrico della molecola d'acqua, che risulta $p_0 = 6.25 \cdot 10^{-30}$ Cm. La suscettività elettrica alla temperatura $T = 393 \text{ K} = 120^\circ\text{C}$ vale

$$\chi_p = 1.46/393 \approx 3.7 \cdot 10^{-3} \rightarrow \kappa = 1 + \chi = 1.0037 .$$

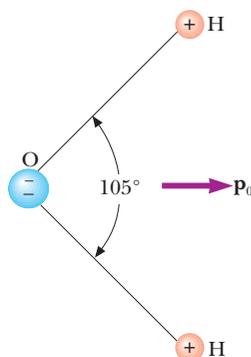


Figura 4.49
Molecola d'acqua.

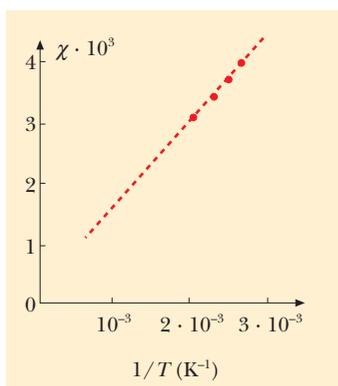


Figura 4.50
Suscettività elettrica del vapore d'acqua.

RIEPILOGO

I materiali **conduttori** in equilibrio elettrostatico hanno le seguenti proprietà:

- il campo elettrostatico all'interno del conduttore è nullo:

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = 0 ;$$

- il potenziale elettrostatico del conduttore è costante; in particolare la superficie del conduttore è una superficie equipotenziale;
- in un conduttore carico la carica si dispone sulla superficie esterna del conduttore con densità superficiale σ , che in ogni punto dipende dalla forma del conduttore;
- sulla superficie di un conduttore il campo elettrostatico è dato dal **teorema di Coulomb**:

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \mathbf{u}_n , \quad (4.1)$$

con \mathbf{u}_n versore normale alle superficie del conduttore.

Un **condensatore** è un sistema di due conduttori tra i quali c'è *induzione completa*. I due conduttori costituiscono le *armature del condensatore*. Il rapporto tra il valore assoluto della carica q presente su ciascuna delle armature e la differenza di potenziale tra le armature V si chiama **capacità del condensatore**:

$$C = \frac{q}{V} . \quad (4.6)$$

La capacità di un condensatore dipende dalla geometria del sistema e dal mezzo interposto.

Nel SI l'unità di misura della capacità è coulomb/volt, detta **farad** (F): $F = C/V$.

La **costante dielettrica assoluta del vuoto** si esprime anche con $\epsilon_0 = 8.86 \text{ pF/m}$.

La **capacità di un condensatore sferico vuoto**, con l'armatura interna di raggio R_1 e l'armatura esterna di raggio R_2 , è:

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} . \quad (4.5)$$

La **capacità di un condensatore piano vuoto**, armature di area Σ distanti h è:

$$C = \frac{\epsilon_0 \Sigma}{h} . \quad (4.8)$$

La **capacità per unità di lunghezza di un condensatore cilindrico vuoto**, con l'armatura interna di raggio R_1 e l'armatura esterna di raggio R_2 , è:

$$C_d = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}} . \quad (4.11)$$

La **capacità equivalente** di un sistema di **condensatori** C_1, C_2, C_3, \dots collegati **in parallelo** è:

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots C_n \quad (4.14)$$

La **capacità equivalente** di un sistema di **condensatori** C_1, C_2, C_3, \dots collegati **in serie** è:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots \frac{1}{C_n} \quad (4.16)$$

L'**energia elettrostatica di un condensatore** carico è:

$$U_e = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} qV . \quad (4.17)$$

Si può rappresentare l'energia elettrostatica correlandola al campo elettrostatico E ; definendo la **densità di energia elettrostatica** (J/m^3):

$$u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 , \quad (4.18)$$

in un volumetto $d\tau$ nell'intorno di un punto P in cui il campo elettrostatico vale E è contenuta una quantità d'energia elettrostatica $dU_e = u_e d\tau$, per cui l'energia elettrostatica risulta:

$$U_e = \int_{\tau} \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 d\tau , \quad (4.19)$$

dove l'integrale è esteso alla regione in cui il campo elettrostatico è diverso da zero.

Le (4.18) e (4.19) hanno validità generale e sono usate in particolare quando i campi elettrici sono prodotti da sistemi complessi non descrivibili come un insieme di cariche opportunamente posizionate.

Quando tra le armature del condensatore viene inserito un **materiale dielettrico** (*isolante*) la sua **capacità** diventa:

$$C_{\kappa} = \kappa C_0 , \quad (4.29)$$

con C_0 la capacità del condensatore vuoto, precedentemente definita e κ una costante adimensionale maggiore di 1 caratteristica del materiale detta **costante dielettrica relativa**.

A parità di carica q presente sulle armature l'aumento della capacità è dovuta alla diminuzione del campo elettrostatico e della differenza di potenziale tra le armature:

$$E_{\kappa} = \frac{E_0}{\kappa} \quad V_{\kappa} = \frac{V_0}{\kappa} , \quad (4.24)$$

se E_0 e V_0 sono rispettivamente il *campo elettrostatico* e la *differenza di potenziale nel vuoto*.

La diminuzione del campo elettrostatico è dovuta a meccanismi di polarizzazione del materiale dielettrico, che comportano la presenza di una **carica di polarizzazione** q_p sulle superficie del dielettrico a contatto (o meno) delle armature pari a:

$$q_p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} q \quad (4.28)$$

con q carica presente sulle armature.

QUESITI

- 4.1** Che differenza c'è tra la carica netta presente su un conduttore carico e la carica libera interna allo stesso?
- 4.2** Un conduttore ha elettroni liberi solo se ha un eccesso di carica negativa?
- 4.3** Un conduttore ha una carica $q = 1.6 \cdot 10^{-9}$ C. Quanti elettroni ha ceduto nel processo di carica? Quanta massa ha ceduto?
- 4.4** Una sferetta conduttrice appesa ad un filo di seta è sospesa in un campo elettrostatico E . Quanto vale il campo elettrostatico E all'interno della sferetta? Varia la risposta se la sferetta è carica?
- 4.5** Due conduttori con carica di segno opposto vengono posti a contatto. Perché all'equilibrio la carica sui due conduttori non può essere di segno opposto?
- 4.6** Due sfere conduttrici di raggi R_1 e R_2 , con $R_1 > R_2$, sono collegate da un filo conduttore. Su quale sfera la carica è maggiore? Quale sfera ha densità di carica σ maggiore? Su quale sfera il campo elettrostatico E è maggiore?
- 4.7** Se il potenziale elettrostatico di una persona posta su un supporto isolante aumenta di 10000 V che cosa succede alla persona? Perché alla persona si rizzano i capelli?
- 4.8** Perché spesso uscendo dalla macchina e chiudendo la portiera scocca una scintilla tra la mano e la maniglia?
- 4.9** Spiegare l'origine del bagliore che si osserva talvolta sulle linee elettriche ad alta tensione.
- 4.10** Se si comunica una carica ad un conduttore di forma cubica: a) dove sarà maggiore la densità di carica σ e b) dove sarà maggiore il campo elettrostatico?
- 4.11** Perché bisogna evitare le punte e i bordi spigolosi nelle apparecchiature ad alta tensione?
- 4.12** Il campo elettrostatico E_{int} all'interno di una sfera conduttrice cava è nullo. Come varia E_{int} se il conduttore ha forma irregolare? Come è il potenziale elettrostatico all'interno?
- 4.13** Un conduttore cavo possiede una carica netta q . Una sferetta metallica con carica $-q$ viene calata nell'interno attraverso un'apertura praticata sulla parte superiore e mantenuta sospesa (pozzo di Farad). La carica netta sul conduttore cavo è variata? La carica netta sulla superficie esterna è variata? Se si estrae la sferetta le condizioni iniziali sono ripristinate?
- 4.14** Due conduttori cilindrici, sottili, montati su due supporti isolanti, sono posti in contatto per un estremo. Una bacchetta di plexiglass carica viene posta davanti ad un cilindro e quindi, sempre con la presenza della bacchetta, i due cilindri vengono separati. Allontanata la bacchetta cosa si può dire della carica netta sui due cilindri?
- 4.15** Un conduttore cavo a forma conica è montato su un supporto isolante. Si introduce all'interno una bacchetta di ebanite carica, senza toccare il conduttore, e simultaneamente si tocca con un dito il conduttore dall'esterno. Quando si estrae la bacchetta il conduttore rimane carico? Dove si distribuisce la carica? Dov'è maggiore la densità di carica?
- 4.16** Una pallina caricata sospesa ad una corda viene attratta quando la si pone vicino ad un piano conduttore. Perché accade ciò? Si può dire qualcosa sul segno della carica della pallina?
- 4.17** Una sfera conduttrice viene avvicinata ad una sfera conduttrice carica. Perché la sfera viene attratta anche se non ha carica?
- 4.18** Una sferetta conduttrice che possiede una piccola carica q viene avvicinata ad una sfera avente una carica $Q \gg q$ dello stesso segno. Perché la sferetta viene attratta pur avendo carica dello stesso segno?
- 4.19** Come si può schermare un laboratorio o un circuito dai campi elettrici dispersi?
- 4.20** Perché i parafulmini sono fatti a punta?
- 4.21** Gli abitanti di un grattacielo con pilastri d'acciaio sono più al sicuro di quelli di una casa di legno durante un temporale?
- 4.22** La capacità di un condensatore dipende dalla carica e/o dalla differenza di potenziale?
- 4.23** Perché ai bordi di un condensatore piano ideale è necessaria la presenza del campo elettrostatico E disperso?
- 4.24** Un condensatore piano ha le armature di area Σ distanti h . Come varia la capacità se: a) la distanza tra le armature diventa $2h$, b) se la distanza tra le armature diventa $h/2$ e c) se le due armature vengono fatte scorrere finché l'area delle superficie sovrapposte è $\Sigma/2$.
- 4.25** Tra le armature di un condensatore piano distanti h viene inserita una lastra di materiale conduttore di spessore $s = h/2$. Come varia la capacità del condensatore? Se il conduttore è carico ed è isolato, aumenta o diminuisce l'energia elettrostatica U_e immagazzinata?
- 4.26** Un condensatore piano carico è montato su un supporto isolante con le due armature collegate ad un elettroscopio. Quando si inserisce all'interno una lastra di ebanite le foglioline dell'elettroscopio si chiudono, per ritornare alla condizione iniziale quando la lastra viene estratta. Date una spiegazione di questo esperimento.
- 4.27** Tra le armature di un condensatore distanti h viene inserita una lastra di materiale dielettrico di costante dielettrica relativa κ . Come varia la capacità del condensatore? Se il condensatore è carico ed è isolato aumenta o diminuisce l'energia elettrostatica U_e immagazzinata?
- 4.28** Se la differenza di potenziale V tra le armature di un condensatore piano viene raddoppiata come varia l'energia elettrostatica U_e immagazzinata?
- 4.29** Le armature di un condensatore piano carico isolato vengono allontanate in modo da raddoppiare la distanza. Di quanto varia l'energia elettrostatica U_e immagazzinata?
- 4.30** Una coppia di condensatori può essere collegata in serie e in parallelo e il sistema così ottenuto collegato ad un generatore che fornisce una differenza di potenziale V . In quale dei due sistemi si immagazzina più energia elettrostatica U_e ?
- 4.31** Perché non si può caricare un isolante per induzione elettrostatica con lo stesso metodo seguito con i conduttori?
- 4.32** Un leggero cilindretto di sambuco (dielettrico) è sospeso ad un filo di seta. Se ad esso viene avvicinata una bacchetta di plexiglass carica il cilindretto tende a portarsi a contatto con la bacchetta, seguendo i suoi movimenti. Se avviene il contatto il cilindretto viene respinto. Dare la spiegazione di entrambe le fasi, precisando in particolare: perché il cilin-

dretto pur non avendo carica risente della forza elettrica e perché finché non avviene il contatto essa è attrattiva?

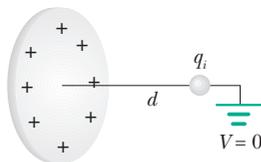
- 4.33 Per poter visualizzare le linee di forza del campo elettrostatico prodotto da sistemi di cariche, si utilizza semolino granulare sospeso su una superficie di olio in modo da rendere libero il movimento. Il campo elettrostatico fa disporre i granelli di semolino lungo delle linee, che coincidono con le linee di forza. Dare una spiegazione di quello che succede. In quali punti si avrà un maggior concentramento di granelli di semolino?
- 4.34 Al di sopra di un anello conduttore piano, quasi a contatto, viene posto del semolino sospeso su un leggero strato d'olio contenuto su un recipiente di plexiglass. Quando si

carica il conduttore verso l'esterno i granelli di semolino si dispongono su semirette radiali che hanno origine dalla superficie esterna del conduttore, mentre nell'interno i granelli di semolino hanno una disposizione completamente casuale. Date una spiegazione di questo esperimento.

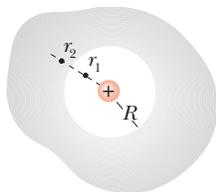
- 4.35 Perché la costante dielettrica relativa κ di un materiale costituito da molecole polari aumenta al diminuire della temperatura T ?
- 4.36 Nel sale da cucina (NaCl) gli atomi sono tenuti insieme dalla forza elettrica F tra gli ioni ^+Na e ^-Cl che distano $\approx 2.8 \cdot 10^{-10}$ m. Nell'acqua, che ha costante dielettrica relativa $\kappa = 80$ il sale si scioglie facilmente perché la forza F diminuisce. Di quanto diminuisce F in acqua?

PROBLEMI

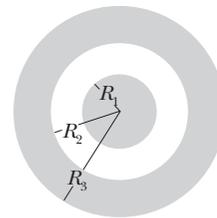
- 4.1 Una sfera di rame di raggio $R = 10$ cm possiede una carica $q = 10^{-8}$ C. Determinare ogni quanti atomi della sfera manca un elettrone. Per il rame: $A = 63.55$, $\rho = 8.96 \cdot 10^3$ kg/m³.
- 4.2 La rigidità dielettrica dell'aria secca è $E_s = 3 \cdot 10^6$ V/m. Calcolare: a) la massima carica q_{max} che può essere depositata su una sfera conduttrice di raggio $R = 10$ cm e b) il potenziale massimo V_{max} assunto.
- 4.3 In un giorno secco il campo elettrostatico vicino alla superficie terrestre è $E = 100$ V/m ed è diretto verso la terra. Nell'ipotesi che E sia costante su tutta la superficie terrestre ($R_T = 6360$ km) calcolare quale sarebbe la carica q presente sulla superficie terrestre, se non ci fossero altri effetti che in pratica tendono a farla diminuire apprezzabilmente.
- 4.4 Una piccola sfera conduttrice, di raggio $r = 1$ mm, è posta sull'asse di un disco di raggio $R = 10$ cm, uniformemente carico con densità $\sigma = 10^{-11}$ C/m²; il centro della sferetta dista $d = 30$ cm dal centro del disco. La sferetta è collegata a terra da un sottile filo conduttore, così che il suo potenziale è nullo. Calcolare la carica q sulla sferetta.



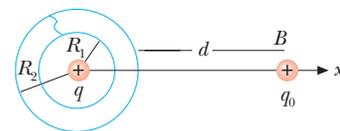
- 4.5 Una carica $q = 2 \cdot 10^{-7}$ C è posta al centro di una cavità sferica di raggio $R = 2$ cm, praticata all'interno di un blocco di metallo. Calcolare: a) il campo elettrico E_1 a distanza $r_1 = 1$ cm dalla carica e b) il campo elettrico E_2 a distanza $r_2 = 3$ cm dalla stessa.



- 4.6 Un conduttore sferico, di raggio $R_1 = 10$ cm, è concentrico ad un conduttore sferico cavo di raggio interno $R_2 = 20$ cm e raggio esterno $R_3 = 40$ cm. Una carica $q = 10^{-8}$ C è depositata sul conduttore interno. Calcolare: a) le cariche q_1 , q_2 e q_3 presenti sulle tre superficie sferiche, b) il campo elettrico $E(r)$ in funzione della distanza r dal centro O del sistema, c) la differenza di potenziale ΔV tra i due conduttori e d) l'energia elettrostatica U_e del sistema.

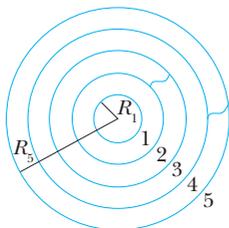


- 4.7 Partendo dalla condizione di equilibrio del problema 4.6, la sfera interna viene appoggiata sul fondo della cavità. Calcolare: a) le cariche q_1 , q_2 e q_3 presenti sulle tre superficie sferiche, b) il campo elettrico $E(r)$ in funzione della distanza r dal centro O del sistema, c) la differenza di potenziale ΔV tra le due sfere e d) la variazione di energia elettrostatica ΔU_e del sistema.
- 4.8 Partendo dalla condizione di equilibrio del problema 4.6 una carica $q^* = -3 \cdot 10^{-8}$ C viene depositata sulla superficie del conduttore cavo. Calcolare: a) le cariche q_1 , q_2 e q_3 presenti sulle superficie sferiche, b) il campo elettrico $E(r)$ in funzione della distanza r dal centro O del sistema, c) la differenza di potenziale ΔV tra i due conduttori e d) la variazione di energia elettrostatica ΔU_e del sistema.
- 4.9 Due fogli metallici sferici, di spessore trascurabile, concentrici, aventi rispettivamente raggi R_1 e $R_2 = 5$ cm, sono

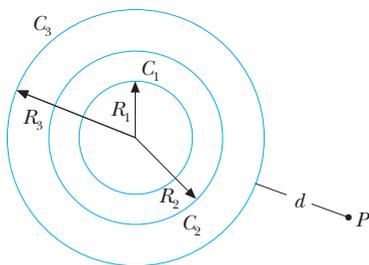


collegati con un sottile filo conduttore. Una carica $q = 10^{-10}$ C è posta al centro del sistema e una carica $q_0 = q$ è posta in un punto B distante $d = 25$ cm dal foglio esterno. Calcolare la forza F esercitata da q_0 su ciascun foglio.

- 4.10** Cinque fogli metallici, sferici di spessore trascurabile, tutti concentrici, aventi raggi pari rispettivamente a 1, 2, 3, 4 e 5 cm, sono collegati con sottili fili conduttori come in figura. Il sistema è inizialmente scarico. Una carica $q = 10^{-10}$ C è depositata sulla superficie più interna. Calcolare: a) le cariche q_1, q_2, q_3, q_4 e q_5 presenti su ciascuna superficie, b) il campo elettrostatico $E(r)$ in funzione della distanza r dal centro O del sistema e c) l'energia elettrostatica U_e del sistema. Determinare inoltre come variano il campo elettrostatico $E(r)$ e l'energia elettrostatica U_e quando: d) la sfera 1 è posta in contatto con la sfera 2, e) la sfera 3 è posta in contatto con la sfera 4, f) la sfera 5 è collegata a terra.

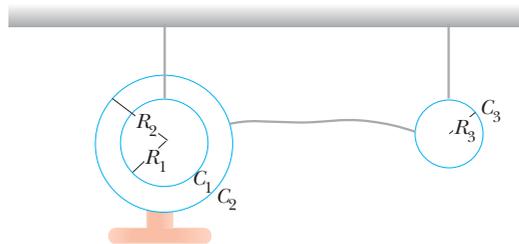


- 4.11** Tre conduttori C_1, C_2, C_3 , sferici, cavi, concentrici, molto sottili, hanno rispettivamente raggi $R_1 = 5$ cm, $R_2 = 10$ cm, $R_3 = 20$ cm. Una carica positiva $q_1 = 0.5 \cdot 10^{-8}$ C viene trasferita a C_1 , una carica negativa $q_2 = -4.5 \cdot 10^{-8}$ C a C_2 e una carica positiva $q_3 = +6 \cdot 10^{-8}$ C a C_3 . Calcolare: a) il campo elettrostatico E_p in un punto P distante $d = 30$ cm dalla superficie di C_3 ; b) la differenza di potenziale $V_3 - V_1$ tra i conduttori C_3 e C_1 . I due conduttori C_1 e C_2 vengono collegati con un filo conduttore. Calcolare: c) la variazione di energia elettrostatica ΔU_e .

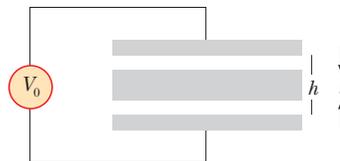


- 4.12** Un elettrone di energia cinetica $E_e = 100$ eV è lanciato verso una lastra metallica indefinita, carica con una densità di carica uniforme $\sigma = -1.776 \cdot 10^{-6}$ C/m². Calcolare: a) da quale distanza h dalla lastra deve essere lanciato l'elettrone per raggiungere la lastra con velocità nulla e b) a quale distanza h' dalla lastra arriva un protone lanciato dalla superficie della lastra, con energia cinetica $E_p = 100$ eV.

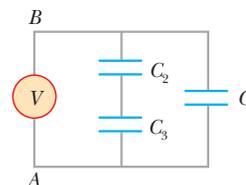
- 4.13** Due conduttori sferici C_1 e C_2 , cavi, molto sottili, concentrici, di raggi rispettivamente $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 20$ cm sono sostenuti ciascuno da un supporto isolante. La carica $q_1 = -2 \cdot 10^{-8}$ C viene trasferita a C_1 , la carica $q_2 = 5 \cdot 10^{-8}$ C a C_2 . Calcolare: a) la differenza di potenziale ΔV tra C_1 e C_2 . Un conduttore sferico C_3 di raggio $R_3 = 5$ cm, sospeso ad un supporto isolante, molto lontano, viene posto in contatto con C_2 tramite un filo conduttore. Calcolare: b) il potenziale V rispetto all'infinito ($V_\infty = 0$) di C_2 e C_3 , c) il campo elettrostatico E_2 e E_3 rispettivamente sulla superficie di C_2 e C_3 e d) la variazione di energia elettrostatica ΔU_e avvenuta con il contatto.



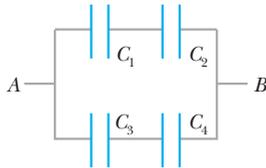
- 4.14** Una lastra di rame di spessore $b = 0.3$ cm viene introdotta parallelamente tra le armature di un condensatore piano di capacità $C_0 = 100$ nF e distanza tra le armature $h = 0.5$ cm, collegato ad un generatore che mantiene una differenza di potenziale $V_0 = 12$ V tra le armature stesse. Calcolare: a) la capacità C dopo l'introduzione della lastra, b) il campo elettrico E nelle parti vuote e c) la variazione della carica Δq fornita dal generatore.



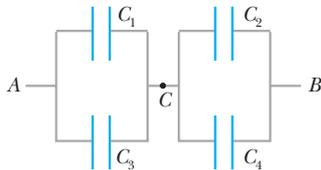
- 4.15** Un condensatore piano, armature di area $\Sigma = 400$ cm² distanti $d = 0.5$ cm, viene caricato alla differenza di potenziale tra le armature $V = 50$ V e quindi isolato. Le armature vengono allontanate finché la loro distanza è $2d = 1$ cm. Calcolare: a) la differenza di potenziale V' tra le armature, b) il campo elettrico E prima e E' dopo l'allontanamento, c) l'energia elettrostatica del sistema iniziale U_e e finale U'_e e d) il lavoro W fatto per allontanare le armature.
- 4.16** Tre condensatori di capacità $C_1 = 2$ μ F, $C_2 = 2$ μ F e $C_3 = 4$ μ F sono collegati come in figura. La differenza di potenziale applicata tra A e B è $V = 100$ V. Calcolare: a) la capacità equivalente C_{eq} del sistema tra A e B , b) la carica q_i , c) la differenza di potenziale V_i per ciascun condensatore e d) l'energia elettrostatica U_e del sistema.



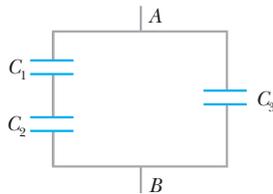
4.17 In figura $C_1 = 20 \text{ pF}$, $C_2 = 40 \text{ pF}$, $C_3 = 30 \text{ pF}$, $C_4 = 60 \text{ pF}$ e la carica sul condensatore C_1 vale $q_1 = 200 \text{ pC}$. Calcolare: a) la differenza di potenziale ΔV tra i punti A e B e b) la carica q_i sui rispettivi condensatori C_i .



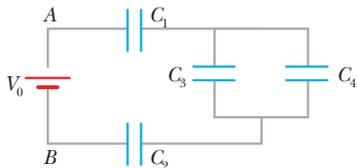
4.18 In figura $C_1 = 20 \text{ pF}$, $C_2 = 40 \text{ pF}$, $C_3 = 30 \text{ pF}$, $C_4 = 60 \text{ pF}$ e la carica sul condensatore C_1 vale $q_1 = 200 \text{ pC}$. Calcolare: a) la differenza di potenziale ΔV tra i punti A e B e b) la carica q_i sui rispettivi condensatori C_i .



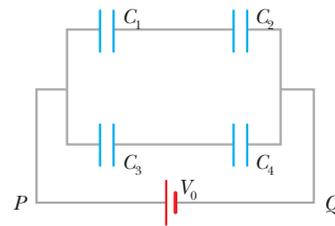
4.19 Nella figura $C_1 = 2 \text{ }\mu\text{F}$, $C_2 = 6 \text{ }\mu\text{F}$, $C_3 = 3.5 \text{ }\mu\text{F}$ e la tensione minima alla quale si innescia la scarica in ciascun condensatore è rispettivamente $V_1 = 100 \text{ V}$, $V_2 = 50 \text{ V}$ e $V_3 = 400 \text{ V}$. Calcolare la massima differenza di potenziale V_{max} possibile tra i punti A e B .



4.20 Si consideri il sistema di condensatori di figura, $C_1 = 2 \text{ nF}$, $C_2 = 3 \text{ nF}$, $C_3 = 5 \text{ nF}$ e $C_4 = 4 \text{ nF}$, collegati ad un generatore con $V_0 = 15 \text{ V}$. Calcolare: a) la capacità equivalente C_{eq} tra i punti A e B , b) la carica q_i su ciascun condensatore e c) l'energia elettrostatica U_e del sistema.

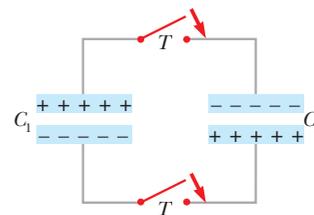


4.21 Nel sistema di condensatori di figura, $C_1 = 20 \text{ nF}$, $C_2 = 40 \text{ nF}$, $C_3 = 50 \text{ nF}$, $C_4 = 30 \text{ nF}$ e $V_0 = 90 \text{ V}$. Calcolare: a) la capacità equivalente C_{eq} del sistema tra i punti P e Q , e b) la differenza di potenziale V_i ai capi di ciascun condensatore.



4.22 Dopo aver caricato due condensatori di capacità $C_1 = 5 \text{ }\mu\text{F}$ e $C_2 = 4 \text{ }\mu\text{F}$ rispettivamente alla differenza di potenziale $V_1 = 300 \text{ V}$ e $V_2 = 250 \text{ V}$, si collegano tra loro le armature positive e le armature negative e viene posto in parallelo ai primi un condensatore $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$. Calcolare: a) la carica q_i presente alla fine su ciascun condensatore e b) la variazione ΔU_e di energia elettrostatica nel processo.

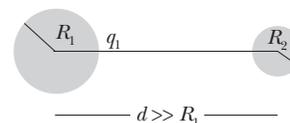
4.23 Due condensatori $C_1 = 120 \text{ pF}$ e $C_2 = 240 \text{ pF}$ sono caricati tramite una batteria ciascuno ad una differenza di potenziale $V = 200 \text{ V}$. I due condensatori vengono collegati tra loro, l'armatura positiva dell'uno con la negativa dell'altro. Calcolare: a) la differenza di potenziale V' ai capi del sistema e b) la variazione di energia elettrostatica ΔU_e .



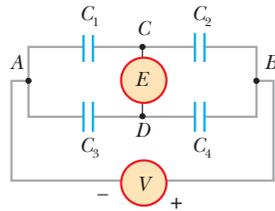
4.24 Due sfere conduttrici C_1 e C_2 , rispettivamente di raggi $R_1 = 6 \text{ cm}$ e $R_2 = 12 \text{ cm}$, hanno la stessa carica $q = 6 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ e sono molto distanti. Le due sfere vengono collegate tra loro con un filo sottile. Calcolare: a) le cariche q_1 e q_2 sui conduttori e b) il numero di elettroni N_e trasferiti da un conduttore all'altro.

4.25 Due piccole sfere conduttrici identiche cariche q_1 e q_2 si attraggono con la forza $F_1 = 0.108 \text{ N}$, quando sono a distanza $r = 50 \text{ cm}$. Le due sfere vengono collegate con un filo sottilissimo conduttore, che viene quindi rimosso. Le sfere ora si respingono con una forza $F_2 = 0.036 \text{ N}$. Calcolare q_1 e q_2 .

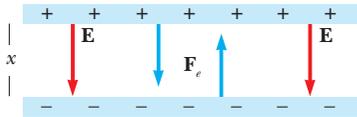
4.26 Due sfere conduttrici di raggi rispettivamente $R_1 = 6 \text{ mm}$ e $R_2 = 4 \text{ mm}$, sono poste a distanza $d \gg R_1$. Una carica $q = 10^{-10} \text{ C}$ viene comunicata alla prima sfera; successivamente le due sfere vengono collegate con un filo sottilissimo conduttore. Calcolare: a) la carica q_1 e q_2 sulle due sfere, b) il potenziale V delle due sfere, c) il campo elettrostatico E_1 e E_2 sulla superficie delle due sfere e d) l'energia elettrostatica ΔU_e persa nel collegamento.



- 4.27** Due gocce di mercurio identiche hanno ciascuna carica $q = 10^{-10}$ C e potenziale $V = 500$ V. Calcolare: a) il raggio R delle due gocce. Le due gocce si fondono insieme per formare un'unica goccia. Calcolare: b) il raggio R' della nuova goccia e c) il potenziale V' della stessa.
- 4.28** Quattro condensatori sono disposti come in figura. Un generatore è collegato tra i punti A e B e un elettroscopio (E) tra i punti C e D per misurare la differenza di potenziale $V_C - V_D$. Dimostrare che l'elettroscopio segna zero quando $C_1/C_2 = C_3/C_4$ (questa disposizione, nota come *ponte capacitivo*, permette di misurare la capacità di un condensatore note le altre tre).



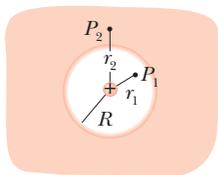
- 4.29** Tra le armature piane di un condensatore, di area Σ e distanti x , c'è un campo elettrico E . Scrivere: a) l'espressione dell'energia elettrostatica $U_e(x)$ e b) calcolare la forza F_e tra le armature.



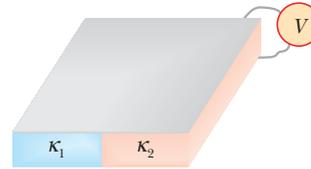
- 4.30** Nell'*elettrometro a bilancia di Thomson* l'area delle armature, costituite da due piastre circolari parallele, è $\Sigma = 400$ cm² e la loro distanza è $h = 5$ mm. Connettendo le piastre ad un generatore che mantiene una differenza di potenziale V tra le armature, per rimettere la bilancia in equilibrio occorre aggiungere una massa $m = 20$ mg sul piatto della bilancia. Calcolare V (utilizzando il risultato del problema 4.29).



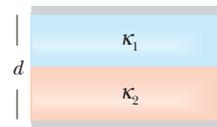
- 4.31** Una carica $q = 2 \cdot 10^{-8}$ C è posta al centro di una cavità sferica di raggio $R = 2$ cm, praticata all'interno di un blocco di materiale isolante, avente costante dielettrica relativa $\kappa = 2.5$. Calcolare: a) il campo elettrico E_1 in un punto P_1 distante $r_1 = 1$ cm dalla carica e b) il campo elettrico E_2 in un punto P_2 , distante $r_2 = 3$ cm dalla carica stessa.



- 4.32** Due lastre di alluminio di area $\Sigma = 10^3$ cm² sono separate da un foglio di carta di spessore d . Calcolare la massima carica q_s con cui si possono caricare le due piastre. La carta ha $\kappa = 3.7$ e la rigidità dielettrica è $E_s = 16 \cdot 10^6$ V/m.
- 4.33** Un cavo sottomarino ha un conduttore interno di diametro $d_1 = 2$ cm circondato da uno schermo conduttore di diametro interno $d_2 = 4$ cm; tra i conduttori c'è teflon, $\kappa = 2.2$. Per un cavo lungo $L = 1$ km, calcolare: a) la capacità C del cavo e b) l'energia elettrostatica U_e immagazzinata, quando la differenza di potenziale tra i conduttori è $V = 20$ kV.
- 4.34** Un condensatore piano, armature circolari di raggio $R = 20$ cm distanti $d = 0.5$ cm, è collegato ad un generatore con $V_0 = 100$ V. Lo spazio tra le armature viene completamente riempito con una lastra isolante, di costante dielettrica relativa $\kappa_r = 2.5$. Calcolare: a) la variazione di energia elettrostatica ΔU_e , b) il valore del campo elettrico E e c) il valore del vettore polarizzazione P .
- 4.35** Un condensatore piano, con armature quadrate di area $\Sigma = 400$ cm² distanti $d = 2$ mm, è riempito per metà di mica ($\kappa_1 = 5$) e per metà di paraffina ($\kappa_2 = 2$), come mostrato in figura. Calcolare: a) la capacità C del condensatore. Se tra le armature viene applicata una differenza di potenziale $V = 2 \cdot 10^3$ V, calcolare: b) il campo elettrostatico E , c) la carica q e d) l'energia elettrostatica U_e del sistema.

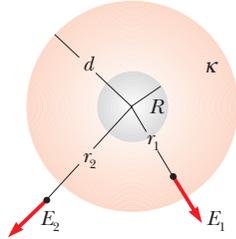


- 4.36** Un condensatore piano, armature quadrate di area $\Sigma = 400$ cm² distanti $d = 5$ mm, è riempito per metà di mica ($\kappa_1 = 5$) e per metà di paraffina ($\kappa_2 = 2$), come mostrato in figura. Calcolare: a) la capacità C del condensatore. Se la differenza di potenziale applicata è $V = 2 \cdot 10^3$ V, calcolare: b) la carica q sulle armature e c) l'energia elettrostatica U_e immagazzinata.

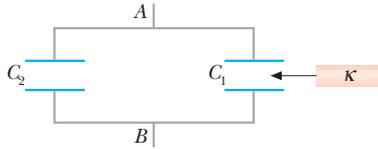


- 4.37** Le armature del condensatore del problema 4.36, hanno una carica $q = 4 \cdot 10^{-7}$ C. Calcolare: a) la carica di polarizzazione q_{p1} presente sulla superficie della lastra di mica e la carica di polarizzazione q_{p2} su quella di paraffina a contatto con le armature del condensatore e b) la carica di polarizzazione q_p presente sulla superficie di contatto mica-paraffina.
- 4.38** Una sfera conduttrice di raggio $R = 1$ cm, è circondata da un guscio di materiale isolante di spessore d e possiede una

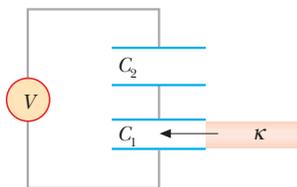
densità di carica $\sigma = 8.86 \cdot 10^{-6} \text{ C/m}^2$. La densità di carica di polarizzazione σ_p sulla superficie dell'isolante di raggio R è $\sigma_p = 0.75 \sigma$. Calcolare: a) la costante dielettrica relativa κ dell'isolante, b) il campo elettrostatico E_1 in un punto all'interno del dielettrico a distanza $r_1 = 2 \text{ cm}$ dal centro e c) a quale distanza r_2 , al di fuori dell'isolante, $E_2 = E_1$.



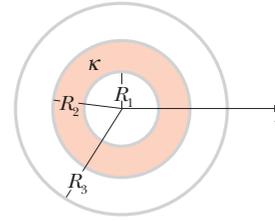
- 4.39 Due condensatori, di capacità $C_1 = 200 \text{ pF}$ e $C_2 = 10^3 \text{ pF}$, collegati in parallelo, vengono caricati ad una differenza di potenziale $V = 400 \text{ V}$ e quindi isolati. Successivamente lo spazio tra le armature di C_1 viene completamente riempito di acqua distillata, contenuta in un sottile contenitore ($\kappa = 80$). Calcolare: a) la variazione ΔV della differenza di potenziale tra A e B e b) la variazione della carica Δq_1 sulle armature di C_1 .



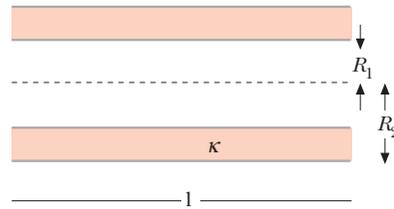
- 4.40 A due condensatori piani di capacità $C_1 = 500 \text{ pF}$ e $C_2 = 1000 \text{ pF}$, collegati in serie, è collegato un generatore che mantiene una differenza di potenziale costante $V = 400 \text{ V}$. Una lastra di dielettrico, con costante dielettrica relativa $\kappa = 4$, viene inserita tra le armature di C_1 , così da riempirlo completamente. Calcolare: a) la variazione di carica Δq erogata dal generatore, b) la variazione ΔV_1 della differenza di potenziale ai capi di C_1 e c) l'energia W_{gen} fornita dal generatore nel processo.



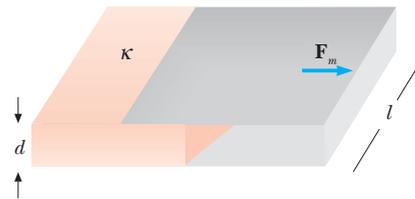
- 4.41 Tre sottili gusci conduttori di forma sferica, concentrici e di raggi rispettivamente $R_1 = 10 \text{ cm}$, $R_2 = 20 \text{ cm}$ e $R_3 = 40 \text{ cm}$, sono stati caricati rispettivamente con carica $q_1 = 10^{-8} \text{ C}$, $q_2 = 3q_1$ e $q_3 = 5q_1$. Lo spazio tra R_1 e R_2 viene completamente riempito di dielettrico di costante dielettrica relativa $\kappa = 4$. Calcolare: a) il campo elettrico $E(r)$ alla distanza $r = 50 \text{ cm}$ dal centro O comune e b) la differenza di potenziale ΔV tra il conduttore interno e quello esterno.



- 4.42 Un condensatore cilindrico, con armature di raggio $R_1 = 5 \text{ mm}$ e $R_2 = 10 \text{ mm}$, lunghe $l = 15 \text{ cm}$, è completamente riempito di un materiale isolante avente costante dielettrica relativa $\kappa = 2.8$. Esso è stato caricato con una carica $q = 2 \text{ nC}$. Calcolare: a) la densità di carica σ_i e il campo elettrostatico E_i su ciascuna armatura, b) la differenza di potenziale ΔV tra le armature e c) la carica di polarizzazione q_p che si forma sulle superfici del dielettrico.



- 4.43 Un condensatore piano ha armature quadrate di lato $l = 20 \text{ cm}$, distanti $d = 5 \text{ mm}$ ed è caricato con una carica $q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$. Una lastra di materiale isolante delle stesse dimensioni dello spazio interno del condensatore e $\kappa = 2.6$, viene avvicinata al condensatore. Calcolare la forza media F_m con cui la lastra viene risucchiata completamente all'interno del condensatore.



- 4.44 Un condensatore piano con armature quadrate di lato l distanti d , è riempito per un tratto x da una lastra isolante, di costante dielettrica relativa κ ed è carico con una carica q . Calcolare: a) la capacità $C(x)$ del condensatore, b) l'energia elettrostatica $U_e(x)$ e la forza $F(x)$ che agisce sulla lastra e in particolare quando è a metà, per $l = 10 \text{ cm}$, $d = 0.5 \text{ cm}$, $\kappa = 2$ e $q = 10^{-8} \text{ C}$.

