

Comprende



versione **Ebook**
e **Software**
di simulazione

P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

Elementi di Fisica

meccanica e termodinamica

II Edizione



P. Mazzoldi

M. Nigro

C. Voci

Dipartimento di Fisica Galileo Galilei – Padova

ELEMENTI DI FISICA

MECCANICA – TERMODINAMICA

SECONDA EDIZIONE



P. Mazzoldi – M. Nigro – C. Voci
ELEMENTI DI FISICA – Meccanica – II edizione
Copyright © 2008, EdiSES s.r.l.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2013 2012 2011 2010 2009 2008

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata



A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilare o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La casa editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.

L'Editore

Fotocomposizione: EdiSES s.r.l. – Napoli
Fotoincisione: PrintSprint – Napoli

Stampato presso la
Tipolitografia Petruzzi Corrado & Co. S.n.c. – Zona Ind. Regnano – Città di Castello (PG)

per conto della EdiSES

http://www.edises.it **E-mail: info@edises.it**

ISBN 978 88 7959 418 9

Prefazione

Nella prefazione della prima edizione del volume **Meccanica e Termodinamica** di questi **Elementi di Fisica** abbiamo spiegato le scelte adottate nella stesura del testo, che riportiamo.

La riforma che ha portato all'istituzione della laurea triennale e della successiva laurea specialistica ha generato una revisione dei programmi e del peso, misurato in crediti, assegnato alle singole materie. Al primo livello la riduzione della durata degli studi e il taglio professionalizzante stanno comportando di fatto una compressione delle materie di base e tra queste della Fisica (fatta eccezione per i corsi della classe di Fisica), compressione che può arrivare fino ad un dimezzamento rispetto alla situazione precedente.

Non vogliamo discutere qui le conseguenze formative e culturali che la riforma può avere. Notiamo soltanto che, nelle nuove condizioni in cui deve operare, il docente di una materia istituzionale come la Fisica Generale si trova di fronte ad una scelta: ridurre il livello di presentazione per conservare il numero di argomenti che normalmente si illustrano agli studenti oppure operare un taglio di argomenti per rimanere ad un adeguato livello di presentazione, simile a quello finora adottato. Noi abbiamo optato per la seconda soluzione, che consideriamo la più valida per gli insegnamenti impartiti nelle facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali e di Ingegneria.

Abbiamo pertanto operato una revisione critica del testo, che tanto favorevolmente è stato accolto dai colleghi in questi anni, consistente in una riduzione di approfondimenti e di nozioni specifiche che erano stati pensati in vista di successivi insegnamenti di materie fisiche, mentre invece è rimasta inalterata la presentazione degli argomenti che costituiscono la base culturale della materia. Ciò nonostante, è sicuro che le nozioni contenute nei capitoli 8, 9, 10, 11 (Fenomeni d'urto, Proprietà meccaniche dei fluidi, Oscillazioni, Gravitazione) non possono tutte rientrare in un solo corso; le abbiamo mantenute per offrire al docente la possibilità di una scelta congeniale al corso che insegna.

È evidente che ci troviamo di fronte ad un difficile passaggio, se ci proponiamo di mantenere anche nella laurea triennale un insegnamento e un accertamento del risultato qualitativamente in linea con la nostra tradizione e nello stesso tempo vogliamo adeguarci alla logica della riforma.

Per questa nuova edizione il testo è stato rivisto apportando tra l'altro alcuni cambiamenti derivati da suggerimenti e osservazioni di colleghi e di studenti. La nuova veste tipografica è intesa a facilitare la lettura del testo.

Con ciò intendiamo continuare a dare un contributo all'impegno professionale dei docenti e uno strumento di apprendimento agli studenti che sia utile per la loro formazione, oltre che per il superamento dell'esame.

Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, Cesare Voci

Padova, settembre 2007

Indice generale

MECCANICA

1

Cinematica del punto: moto rettilineo 5

- 1.1 Introduzione 5
- 1.2 Moto rettilineo 6
- 1.3 Velocità nel moto rettilineo 7
- 1.4 Accelerazione nel moto rettilineo 10
- 1.5 Moto verticale di un corpo 15
- 1.6 Moto armonico semplice 16
- 1.7 Moto rettilineo smorzato
esponenzialmente 19
- 1.8 Velocità e accelerazione in funzione
della posizione 19
- 1.9 Moto relativo rettilineo 22
 - Riepilogo 23
 - Quesiti 24
 - Problemi 25

2

Cinematica del punto: moto nel piano 28

- 2.1 Moto nel piano. Posizione
e velocità 28
- 2.2 Accelerazione nel moto piano 31
- 2.3 Moto circolare 33
- 2.4 Moto parabolico dei corpi 38
- 2.5 Moto nello spazio 41
- 2.6 Moto relativo nel piano 42
- 2.7 Alcune osservazioni sulla cinematica
del punto 43
 - Riepilogo 44
 - Quesiti 45
 - Problemi 45

3

Dinamica del punto: le leggi di Newton 48

- 3.1 Principio d'inerzia. Introduzione
al concetto di forza 48
- 3.2 Leggi di Newton 49
- 3.3 Quantità di moto. Impulso 51
- 3.4 Risultante delle forze. Equilibrio.
Reazioni vincolari 53

- 3.5 Classificazione delle forze 56
- 3.6 Azione dinamica delle forze 56
- 3.7 Forza peso 58
- 3.8 Forza di attrito radente 60
- 3.9 Piano inclinato 63
- 3.10 Forza elastica 66
- 3.11 Forza di attrito viscoso 68
- 3.12 Forze centripete 70
- 3.13 Pendolo semplice 72
- 3.14 Tensione dei fili 74
 - Riepilogo 77
 - Quesiti 79
 - Problemi 80

4

Dinamica del punto: lavoro, energia, momenti 86

- 4.1 Lavoro. Potenza. Energia cinetica 86
- 4.2 Lavoro della forza peso 89
- 4.3 Lavoro di una forza elastica 91
- 4.4 Lavoro di una forza
di attrito radente 92
- 4.5 Forze conservative. Energia
potenziale 93
- 4.6 Conservazione dell'energia
meccanica 95
- 4.7 Momento angolare. Momento
della forza 99
- 4.8 Alcune osservazioni sulla dinamica
del punto 102
 - Riepilogo 103
 - Quesiti 104
 - Problemi 105

5

Moti relativi 110

- 5.1 Sistemi di riferimento. Velocità
e accelerazione relative 110
- 5.2 Sistemi di riferimento inerziali.
Relatività galileiana 113
- 5.3 Moto di trascinamento traslatorio
rettilineo 114
- 5.4 Moto di trascinamento rotatorio
uniforme 119
- 5.5 Alcuni commenti 122

Riepilogo 124
 Quesiti 125
 Problemi 125

Riepilogo 194
 Quesiti 195
 Problemi 196

6 **Dinamica dei sistemi di punti materiali 127**

- 6.1 Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne 127
- 6.2 Centro di massa di un sistema di punti. Teorema del moto del centro di massa 129
- 6.3 Conservazione della quantità di moto 133
- 6.4 Teorema del momento angolare 135
- 6.5 Conservazione del momento angolare 137
- 6.6 Sistema di riferimento del centro di massa 138
- 6.7 Teoremi di König 139
- 6.8 Il teorema dell'energia cinetica 142
- 6.9 Considerazioni riassuntive 145
- 6.10 Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi 146
 Riepilogo 148
 Quesiti 149
 Problemi 149

7 **Dinamica del corpo rigido 152**

- 7.1 Definizione di corpo rigido. Prime proprietà 152
- 7.2 Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa 153
- 7.3 Moto di un corpo rigido 157
- 7.4 Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale 160
- 7.5 Momento d'inerzia 166
- 7.6 Teorema di Huygens-Steiner 169
- 7.7 Pendolo composto 172
- 7.8 Moto di puro rotolamento 173
- 7.9 Impulso angolare. Momento dell'impulso 178
- 7.10 Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido 179
- 7.11 Equilibrio statico del corpo rigido 182
- 7.12 Riepilogo sulla dinamica del corpo rigido 186
- 7.13 Cenni sulle proprietà elastiche dei solidi 186

8 **Fenomeni d'urto 205**

- 8.1 Urti tra due punti materiali 205
- 8.2 Urto completamente anelastico 208
- 8.3 Urto elastico 210
- 8.4 Urto anelastico 213
- 8.5 Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi 214
 Riepilogo 218
 Quesiti 219
 Problemi 219

9 **Proprietà meccaniche dei fluidi 225**

- 9.1 Generalità sui fluidi. Pressione 225
- 9.2 Equilibrio statico di un fluido in presenza della forza peso 227
- 9.3 Principio di Archimede 233
- 9.4 Attrito interno. Viscosità. Fluido ideale 235
- 9.5 Moto di un fluido. Regime stazionario. Portata 236
- 9.6 Teorema di Bernoulli 238
- 9.7 Applicazioni del teorema di Bernoulli 240
- 9.8 Effetti dinamici. Vortici 243
- 9.9 Moto laminare 244
- 9.10 Moto vorticoso. Numero di Reynolds 245
- 9.11 Moto in un fluido. Resistenza del mezzo 247
 Riepilogo 248
 Quesiti 249
 Problemi 250

10 **Oscillazioni 251**

- 10.1 Richiamo delle proprietà già viste 251
- 10.2 Proprietà dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico 252
- 10.3 Energia dell'oscillatore armonico 254
- 10.4 Somma di moti armonici sullo stesso asse 257
- 10.5 Somma di moti armonici su assi ortogonali 260
- 10.6 Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa 262
- 10.7 Oscillatore armonico forzato 266

- 10.8 Analisi di Fourier 270
- 10.9 Oscillazioni e onde 271
 - Riepilogo 272
 - Quesiti 274
 - Problemi 274

11 Gravitazione 275

- 11.1 Forze centrali 275
- 11.2 La forza gravitazionale 277
- 11.3 Massa inerziale e massa gravitazionale 280
- 11.4 Campo gravitazionale 282
- 11.5 Energia potenziale gravitazionale 284
- 11.6 Moto di un corpo sottoposto alla forza gravitazionale: soluzione generale 287
- 11.7 Cenni di relatività generale 289
 - Riepilogo 290
 - Quesiti 291
 - Problemi 292

TERMODINAMICA

12 Primo principio della termodinamica 295

- 12.1 Sistemi e stati termodinamici 295
- 12.2 Equilibrio termodinamico. Principio dell'equilibrio termico 297
- 12.3 Definizione di temperatura. Termometri 298
- 12.4 Sistemi adiabatici. Esperimenti di Joule. Calore 301
- 12.5 Primo principio della termodinamica. Energia interna 302
- 12.6 Trasformazioni termodinamiche. Lavoro e calore 305
- 12.7 Calorimetria 308
- 12.8 Processi isotermi. Cambiamenti di fase 312
- 12.9 Trasmissione del calore 315
- 12.10 Dilatazione termica di solidi e liquidi 318
 - Riepilogo 320
 - Quesiti 322
 - Problemi 323

13 Gas ideali e reali 324

- 13.1 Leggi dei gas. Equazione di stato dei gas ideali 324

- 13.2 Termometro a gas ideale a volume costante 329
- 13.3 Trasformazioni di un gas. Lavoro 331
- 13.4 Calore. Calori specifici 334
- 13.5 Energia interna del gas ideale 335
- 13.6 Studio di alcune trasformazioni 339
- 13.7 Trasformazioni cicliche. Ciclo di Carnot 345
- 13.8 Gas reali. Equazione di stato. Energia interna 350
- 13.9 Diagrammi pV . Diagrammi pT . Formula di Clapeyron 352
- 13.10 Teoria cinetica dei gas 357
- 13.11 Significato cinetico di temperatura e calore 363
 - Riepilogo 364
 - Quesiti 366
 - Problemi 367

14 Secondo principio della termodinamica 373

- 14.1 Enunciati del secondo principio della termodinamica 373
- 14.2 Reversibilità e irreversibilità 375
- 14.3 Teorema di Carnot 376
- 14.4 Temperatura termodinamica assoluta 380
- 14.5 Teorema di Clausius 381
- 14.6 La funzione di stato entropia 383
- 14.7 Il principio di aumento dell'entropia 387
- 14.8 Calcoli di variazioni di entropia 388
- 14.9 Entropia del gas ideale 394
- 14.10 Energia inutilizzabile 396
- 14.11 Conclusioni termodinamiche sull'entropia 398
- 14.12 Cenni sul terzo principio della termodinamica 398
 - Riepilogo 399
 - Quesiti 400
 - Problemi 401

A Appendice 406

- Richiami matematici 406

B Appendice 411

- Le unità di misura 411

C Appendice 417

- Calcolo vettoriale 417

**Guida alla risoluzione
dei problemi.
Risultati numerici 428**

Indice analitico 460

Fenomeni d'urto

Presentiamo in questo capitolo alcune situazioni fisiche di interesse che si verificano quando due punti materiali, o un punto e un corpo rigido, o due corpi rigidi vengono a contatto e interagiscono per un intervallo di tempo trascurabile rispetto ai tempi tipici di osservazione del loro moto prima e dopo il contatto. Il fenomeno si chiama urto ed è di così breve durata da giustificare l'assunzione che durante l'interazione i due corpi non si muovano in modo apprezzabile.

8.1 URTI TRA DUE PUNTI MATERIALI

Cominciamo con il considerare l'urto tra due punti materiali. Durante l'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto. Queste forze che, come avviene in un urto, agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione, sono chiamate **forze impulsive**. Nella figura 8.1 è rappresentato un possibile andamento del modulo della forza in funzione del tempo. L'azione della forza si esplica nell'intervallo $\tau = t_2 - t_1$.

Osserviamo che le forze che si manifestano durante il processo d'urto sono forze interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. **In assenza di forze esterne si verifica pertanto durante l'urto la conservazione della quantità di moto totale.**

Se indichiamo con $\mathbf{v}_{1, \text{in}}$, $\mathbf{v}_{2, \text{in}}$ le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse m_1 e m_2 , e con $\mathbf{v}_{1, \text{fin}}$, $\mathbf{v}_{2, \text{fin}}$ le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di \mathbf{P} si scrive

$$\mathbf{P}_{\text{in}} = m_1 \mathbf{v}_{1, \text{in}} + m_2 \mathbf{v}_{2, \text{in}} = m_1 \mathbf{v}_{1, \text{fin}} + m_2 \mathbf{v}_{2, \text{fin}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} . \quad (8.1)$$

La quantità di moto del centro di massa rimane invariata nell'urto:

$$\mathbf{P} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} = \mathbf{P}_{\text{in}} = \mathbf{P}_{\text{fin}} = \text{costante} ; \quad (8.2)$$

il moto del centro di massa non viene cioè alterato dall'urto. Invece variano le quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione:

$$m_1 \mathbf{v}_{1, \text{fin}} - m_1 \mathbf{v}_{1, \text{in}} = \mathbf{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{2,1} dt ,$$

$$m_2 \mathbf{v}_{2, \text{fin}} - m_2 \mathbf{v}_{2, \text{in}} = \mathbf{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{1,2} dt .$$

$\mathbf{J}_{2,1}$ è l'impulso dovuto alla forza impulsiva $\mathbf{F}_{2,1}$ esercitata dal punto 2 sul punto 1 e analogo significato ha $\mathbf{J}_{1,2}$. Naturalmente

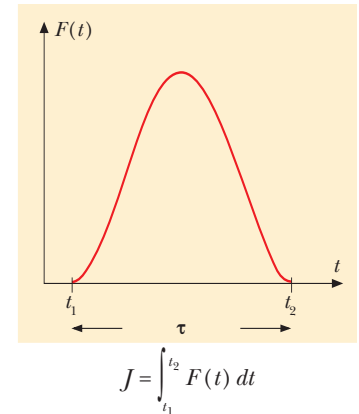


Figura 8.1
Impulso di una forza.

$$\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1} \Rightarrow \mathbf{J}_{1,2} = -\mathbf{J}_{2,1} ;$$

le variazioni di quantità di moto sono eguali ed opposte.

Possiamo conservare la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne? La risposta è positiva se la durata τ dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive. Infatti la variazione di quantità di moto totale del sistema dovuta alle forze esterne è

$$\Delta \mathbf{P} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}^{(E)} dt = \mathbf{F}_m^{(E)} \tau$$

e se τ è molto breve $\Delta \mathbf{P}$ risulta trascurabile. Il ragionamento non sarebbe corretto se $\mathbf{F}^{(E)}$ fosse impulsiva nell'intervallo τ in quanto in tal caso il valore medio $\mathbf{F}_m^{(E)}$ potrebbe assumere valori notevoli. Alternativamente, considerando $\mathbf{J}_{1,2}$ o $\mathbf{J}_{2,1}$ prima calcolati, si può scrivere

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} dt = \mathbf{F}_m \tau$$

dove \mathbf{F}_m è il valore medio della forza impulsiva nell'intervallo τ (figura 8.2). Dato che \mathbf{J} assume un valore finito e τ è molto breve, \mathbf{F}_m può assumere valori estremamente grandi, rispetto ai quali $\mathbf{F}^{(E)}$ è certamente trascurabile. La forza esterna non modifica i singoli impulsi durante l'urto e quindi resta vera l'eguaglianza $\mathbf{J}_{1,2} = -\mathbf{J}_{2,1}$ e valida la conservazione della quantità di moto totale.

Quindi nell'ipotesi che l'interazione tra i punti materiali abbia un'intensità molto grande rispetto alle eventuali forze esterne presenti un urto può essere definito dalle seguenti proprietà:

- un urto comporta uno scambio di quantità di moto tra due punti sotto forma di impulsi dovuti alle forze interne tra gli stessi;
- nell'urto la quantità di moto prima dell'urto è uguale alla quantità di moto dopo l'urto, la quantità di moto si conserva.

Questa definizione prescinde dal meccanismo specifico con cui avviene il trasferimento di impulsi e quindi dall'effettivo contatto tra i due punti materiali. Se ad esempio un protone interagisce con un elettrone, figura 8.3, essi non vengono mai effettivamente a contatto; il trasferimento di impulsi avviene a causa della forza elettrica che si manifesta quando essi sono a piccolissima distanza. Questo processo non viene influenzato dalla forza peso che agisce sulle due particelle, essendo quest'ultima assolutamente trascurabile rispetto alla precedente.

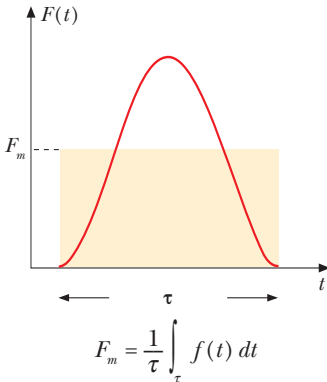


Figura 8.2

Valore medio della forza impulsiva in un urto.

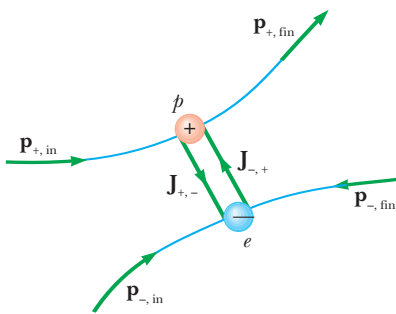


Figura 8.3

Diffusione elastica (urto) tra un elettrone ed un protone.

ESEMPIO 8.1 Una palla da biliardo

Una sfera di massa $m = 300$ g colpisce la sponda di un tavolo da biliardo con la velocità $v = 20$ m/s che forma un angolo $\theta = 60^\circ$ con la sponda e rimbalza con la stessa velocità, figura 8.4. Se il contatto con la sponda dura $\tau = 0.1$ s, calcolare la forza media esercitata dalla sponda sulla palla.

Soluzione La variazione di quantità di moto, che determina l'impulso è:

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_{fin} - \mathbf{p}_{in} = 2mv \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \mathbf{u}_n = 10.4 \mathbf{u}_n \text{ Ns}$$

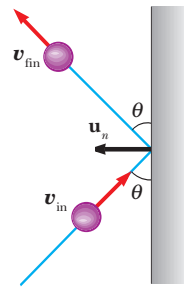


Figura 8.4

per cui la forza media esercitata sulla palla risulta

$$\mathbf{F}_m = \frac{J}{\tau} \mathbf{u}_n = 104 \mathbf{u}_n \text{ N} .$$

La palla esercita una forza eguale e contraria sulla sponda (si veda l'esempio 3.1).

Ricordiamo infine che a priori non è noto se le forze interne che si sviluppano nell'urto sono conservative e pertanto non si può assumere la conservazione dell'energia meccanica del sistema durante l'urto. Dato che la posizione dei punti non varia nell'urto, eventuali energie potenziali dei punti non variano nell'urto e quindi $\Delta E_m = \Delta E_k$; l'argomento appena esposto si traduce pertanto nel fatto che *in un urto non si può assumere a priori che l'energia cinetica si conservi*.

Riguardo all'energia cinetica torna utile il secondo teorema di König (6.18): per i due punti

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 + E'_k .$$

Il primo termine, energia cinetica del centro di massa, non varia nell'urto se vale la conservazione della quantità di moto, come supponiamo. Ciò che resta costante o varia, a seconda che le forze interne siano conservative o non conservative, è l'energia cinetica rispetto al centro di massa

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 .$$

Sistema del laboratorio e sistema del centro di massa

Il sistema di riferimento inerziale in cui è posto il dispositivo che permette di fare urtare i due punti e di studiare le caratteristiche dell'urto si chiama spesso sistema del laboratorio. L'urto però può essere studiato anche nel sistema di riferimento del centro di massa (paragrafo 6.6).

Il legame tra le velocità nei due sistemi, figura 8.5a, in qualsiasi istante è

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_2 + \mathbf{v}_{CM} . \quad (6.14)$$

Nel sistema del centro di massa la quantità di moto totale è nulla, come già sappiamo; per altro la verifica è immediata:

$$\mathbf{P} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 + (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \Rightarrow m_1 \mathbf{v}'_1 + m_2 \mathbf{v}'_2 = 0 ,$$

avendo usato (6.14) e (8.2). Dunque

$$m_1 \mathbf{v}'_{1, \text{in}} + m_2 \mathbf{v}'_{2, \text{in}} = m_1 \mathbf{v}'_{1, \text{fin}} + m_2 \mathbf{v}'_{2, \text{fin}} = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{p}'_{1, \text{in}} = -\mathbf{p}'_{2, \text{in}} \quad , \quad \mathbf{p}'_{1, \text{fin}} = -\mathbf{p}'_{2, \text{fin}} .$$

Dal centro di massa, figura 8.5b, si vedono i punti arrivare verso il centro di massa con quantità di moto eguali in modulo e opposte in verso; i punti si urtano nella posizione occupata dal centro di massa e ripartono dopo l'urto con quantità di moto eguali in modulo e opposte in verso (in generale però $p'_{\text{fin}} \neq p'_{\text{in}}$).

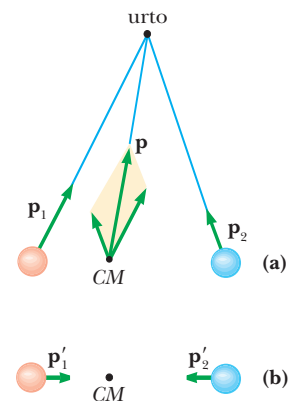


Figura 8.5

Sistema del laboratorio (a) e del centro di massa (b) nell'urto tra due punti materiali.

L'energia cinetica nel sistema del centro di massa è semplicemente quella relativa al centro di massa e normalmente si ha

$$E'_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v'_{1, \text{in}}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_{2, \text{in}}{}^2 \neq E'_{k, \text{fin}} = \frac{1}{2} m_1 v'_{1, \text{fin}}{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v'_{2, \text{fin}}{}^2 .$$

8.2 URTO COMPLETAMENTE ANELASTICO

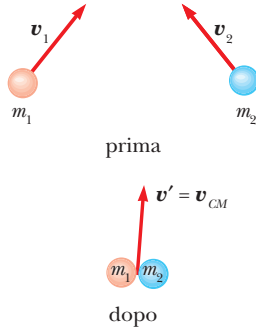


Figura 8.6

Urto elastico tra due punti materiali nel sistema del centro di massa.

L'**urto** si chiama **completamente anelastico**, figura 8.6, quando i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$.

Se \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e \mathbf{v}' la velocità comune immediatamente dopo l'urto, da (8.1) e (8.2) si ha

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}' = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} ,$$

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} .$$

Subito dopo l'urto i punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto (\mathbf{v}_{CM} resta invariata nell'urto). Le variazioni di quantità di moto dei singoli punti sono $m_1 \mathbf{v}_{CM} - m_1 \mathbf{v}_1$ e $m_2 \mathbf{v}_{CM} - m_2 \mathbf{v}_2$ e si verifica subito che sono eguali ed opposte.

Calcoliamo l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto:

$$E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_k + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 ,$$

avendo applicato il secondo teorema di König (6.18); invece

$$E_{k, \text{fin}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 < E_{k, \text{in}} .$$

In effetti, dopo l'urto completamente anelastico non c'è più moto rispetto al centro di massa, con cui i due punti vengono a coincidere, e concludiamo che in questo tipo d'urto è assorbita proprio E'_k , l'energia cinetica che i punti hanno rispetto al centro di massa prima dell'urto:

$$\Delta E_k = E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = -E'_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2 .$$

Ciò che avviene in realtà si può schematizzare così: i due corpi, che assimiliamo a punti materiali, durante l'urto si deformano in modo permanente e restano compenetrati. Il lavoro compiuto, a spese dell'energia cinetica iniziale, per fare avvenire la deformazione non viene più recuperato, ovvero le *forze interne* che si sviluppano nell'urto *non sono conservative*.

Energia cinetica assorbita

ESEMPIO 8.2 Urto completamente anelastico tra due corpi

Un punto di massa m_1 con velocità \mathbf{v}_1 urta in modo completamente anelastico un punto di massa m_2 fermo ($\mathbf{v}_2 = 0$), figura 8.7. Calcolare la velocità finale dei due punti, la varia-

zione di energia cinetica, il rapporto tra l'energia cinetica finale e quella iniziale. Nel sistema del centro di massa quali sono le velocità dei punti prima dell'urto?

Soluzione Dalla conservazione della quantità di moto

$$m_1 \mathbf{v}_1 = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{v}_1 \quad .$$

La direzione e il verso del moto dopo l'urto sono gli stessi del moto di m_1 prima dell'urto (il problema è unidimensionale). Le energie cinetiche sono:

$$E_{k, \text{in}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad ,$$

$$E_{k, \text{fin}} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 \quad ,$$

$$\Rightarrow \Delta E_k = E_{k, \text{fin}} - E_{k, \text{in}} = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v_1^2 \quad ,$$

$$\frac{E_{k, \text{fin}}}{E_{k, \text{in}}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \quad .$$

Se le masse sono eguali si perde metà dell'energia cinetica, se $m_1 \gg m_2$ non si perde praticamente nulla ($v_{CM} \simeq v_1$, m_1 prosegue quasi indisturbata insieme a m_2), se $m_1 \ll m_2$ si perde praticamente tutta l'energia cinetica ($v_{CM} \ll v_1$).

Nel sistema del centro di massa

$$v'_1 = v_1 - v_{CM} = v_1 - \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad ,$$

$$v'_2 = -v_{CM} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{CM} \quad .$$

Entrambi i punti di muovono verso il CM (che in ogni istante sta nella posizione intermedia dell'esempio 4.1) con velocità diverse, ma eguali quantità di moto. L'energia cinetica nel CM è

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1^2 = -\Delta E_k \quad ,$$

in accordo con quanto detto prima.

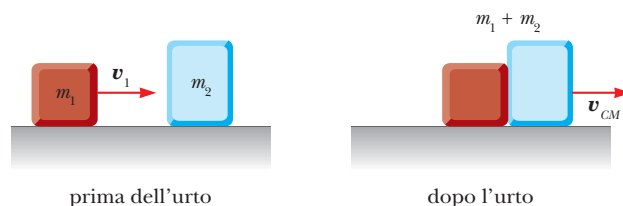


Figura 8.7

ESEMPIO 8.3

Urto completamente anelastico tra due corpi che scendono lungo un piano inclinato

Si considerino due corpi puntiformi, di massa m_1 e m_2 , che scendono lungo un piano inclinato liscio con velocità v_1 e v_2 . All'istante $t = 0$ la distanza tra i due corpi è d e le loro velocità sono $v_{0,1}$ e $v_{0,2}$ con $v_{0,1} > v_{0,2}$, figura 8.8. Si determini la velocità dopo l'urto, che viene assunto completamente anelastico.

Soluzione Le velocità dei due corpi sono funzioni del tempo

$$v_1 = v_{0,1} + at \quad , \quad v_2 = v_{0,2} + at$$

con $a = g \sin \theta$. Il moto relativo è uniforme con velocità

$$v_1 - v_2 = v_{0,1} - v_{0,2}$$

e quindi l'urto avviene al tempo $t^* = d / (v_{0,1} - v_{0,2})$. Applichiamo la conservazione della quantità di moto durante l'urto:

$$m_1 v_{0,1} + m_1 a t^* + m_2 v_{0,2} + m_2 a t^* = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$$v_{CM}(t^*) = \frac{m_1 v_{0,1} + m_2 v_{0,2}}{m_1 + m_2} + a t^* = v_{CM}(t = 0) + a t^* \quad .$$

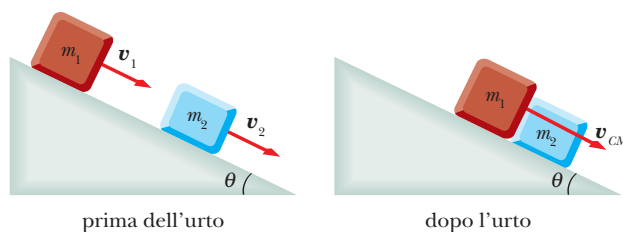


Figura 8.8

Dopo l'urto i due corpi scendono uniti con velocità data da

$$v = v_{CM}(t^*) + a(t - t^*) = v_{CM}(t = 0) + at$$

Quindi il centro di massa scende con la stessa legge prima e dopo l'urto e la sua velocità non subisce discontinuità nell'urto.

Questo è un caso in cui si applica (8.1) pur in presenza della forza esterna peso, in quanto non impulsiva.

ESEMPIO 8.4 Pendolo balistico

Il pendolo balistico, utilizzato per misurare la velocità di un proiettile, consiste di un grande blocco di legno, appeso verticalmente. Una pallottola di massa m , che viaggia orizzontalmente con velocità v , urta il pendolo rimanendovi conficcata, figura 8.9a. Se il tempo di collisione è piccolo rispetto al periodo di oscillazione del pendolo, la cordicella che sostiene la massa M resta praticamente verticale durante l'urto. Per tempo di collisione si intende il tempo necessario perché il proiettile si fermi all'interno del legno (si può stimare per fenomeni di questo tipo una durata dell'ordine di 10^{-4} s).

Nessuna forza esterna orizzontale agisce sul sistema e pertanto è possibile conservare nell'urto la componente orizzontale della quantità di moto.

Terminata la collisione, figura 8.9b, il pendolo con la pallottola inizia ad oscillare raggiungendo un'altezza massima h , misurata rispetto alla posizione di equilibrio, tale che l'energia potenziale corrispondente eguagli l'energia cinetica del sistema subito dopo l'urto. Si può pertanto risalire al valore della velocità del sistema ($M + m$) e quindi a quella del proiettile prima dell'urto.

La conservazione della quantità di moto durante l'urto, completamente anelastico, dà

$$mv = (m + M)v' .$$

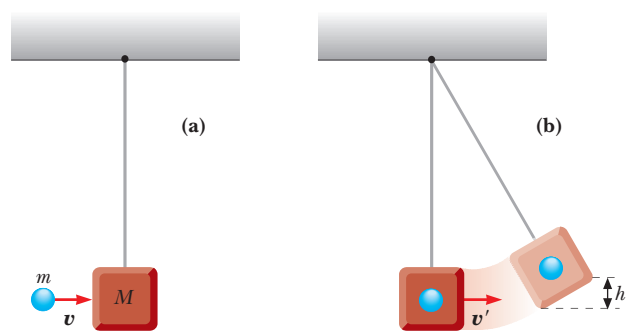


Figura 8.9

Dopo l'urto, per la conservazione dell'energia meccanica durante l'oscillazione,

$$\frac{1}{2} (m + M)v'^2 = (m + M)gh$$

$$\Rightarrow v' = \sqrt{2gh} \quad , \quad v = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh} .$$

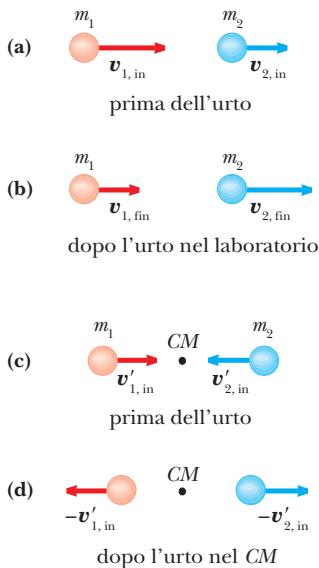


Figura 8.10

Urto elastico tra due punti materiali in moto traslatorio nel sistema del laboratorio (a) e (b) e nel sistema del centro di massa (c) e (d).

8.3 URTO ELASTICO

Si definisce come **urto elastico** un urto durante il quale **si conserva anche l'energia cinetica del sistema**. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. I due corpi reali che si urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

Nello studio di un urto elastico possiamo utilizzare le equazioni

$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin} \quad , \quad E_{k,in} = E_{k,fin}$$

(ed è l'unico caso in cui le due leggi valgono simultaneamente).

Limitandoci ad un **urto centrale**, che avviene quando due punti materiali si muovono prima e dopo l'urto lungo la stessa direzione, abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (le velocità dei due punti dopo l'urto) e possiamo risolvere il problema. Scriviamo dunque in questo caso:

$$m_1v_{1,in} + m_2v_{2,in} = m_{1,fin} + m_2v_{2,fin} = (m_1 + m_2)v_{CM} ,$$

$$\frac{1}{2} m_1v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2v_{2,fin}^2 .$$

Risolvendo il sistema si trova la soluzione:

$$\begin{aligned}
 v_{1, \text{fin}} &= \frac{(m_1 - m_2)v_{1, \text{in}} + 2 m_2 v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2}, \\
 v_{2, \text{fin}} &= \frac{2 m_1 v_{1, \text{in}} + (m_2 - m_1)v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2}.
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

rappresentata in figura 8.10a e b.

Nell'applicazione di (8.3) bisogna fare attenzione ai segni delle velocità. Prendendo come riferimento il verso di $v_{1, \text{in}}$, $v_{2, \text{in}}$ va inserita con segno positivo o negativo a seconda che $v_{2, \text{in}}$ sia concorde o discorde a $v_{1, \text{in}}$. Ottenute le velocità finali, per ciascuna vale la stessa regola: se è positiva vuol dire che è concorde a $v_{1, \text{in}}$, se è negativa che è discorde.

Se l'urto elastico viene considerato nel sistema di riferimento del centro di massa si trova:

$$v'_{1, \text{fin}} = -v'_{1, \text{in}}, \quad v'_{2, \text{fin}} = -v'_{2, \text{in}}.$$

La velocità e la quantità di moto di ciascun punto restano le stesse in modulo, cambiano solo di verso, figura 8.10c e d.

ESEMPIO 8.5 I vari casi possibili nell'urto elastico tra due punti materiali

In un urto elastico centrale tra due punti materiali assumiamo che $v_{1, \text{in}}$ sia concorde all'asse x : elencare i possibili stati iniziali e, per ciascuno di questi, i possibili stati finali, precisando i segni delle velocità.

è concorde all'asse x e minore in modulo di $v_{1, \text{in}}$ (m_1 insegue e raggiunge m_2), nel secondo $v_{2, \text{in}}$ è discorde all'asse x (m_2 va incontro a m_1). Nel primo caso ci sono due possibili stati finali, nel secondo tre.

Il risultato finale dipende ovviamente dai valori delle masse e delle velocità iniziali.

Soluzione Gli stati iniziali possibili sono due: nel primo $v_{2, \text{in}}$

Stato iniziale	Stato finale	$v_{1, \text{fin}}$	$v_{2, \text{fin}}$
		> 0	> 0
		< 0	> 0
		> 0	> 0
		< 0	< 0
		< 0	> 0

ESEMPIO 8.6 Urto elastico tra due punti con velocità concordi

Studiare l'urto elastico tra due punti aventi velocità iniziali concordi, nei casi in cui: a) $m_1 = m_2$, b) $m_1 \gg m_2$, c) $m_1 \ll m_2$, figura 8.11.

Soluzione Partiamo dalle (8.3). Nel primo caso a)

$$v_{1, \text{fin}} = v_{2, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v_{1, \text{in}} \quad .$$

Dopo l'urto le velocità dei due punti risultano scambiate, m_2 è più veloce di m_1 .

Nel secondo caso b) si trascura m_2 rispetto a m_1 :

$$v_{1, \text{fin}} = v_{1, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = 2v_{1, \text{in}} - v_{2, \text{in}} \quad .$$

Il moto di m_1 è (praticamente) indisturbato, m_2 acquista una velocità maggiore di quella di m_1 .

Nel terzo caso c) si trascura m_1 rispetto a m_2 :

$$v_{1, \text{fin}} = -v_{1, \text{in}} + 2v_{2, \text{in}} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = v_{2, \text{in}} \quad .$$

Ora è m_2 a non subire perturbazioni mentre m_1 torna indietro se $v_{1, \text{in}} > 2v_{2, \text{in}}$ o prosegue nello stesso verso.

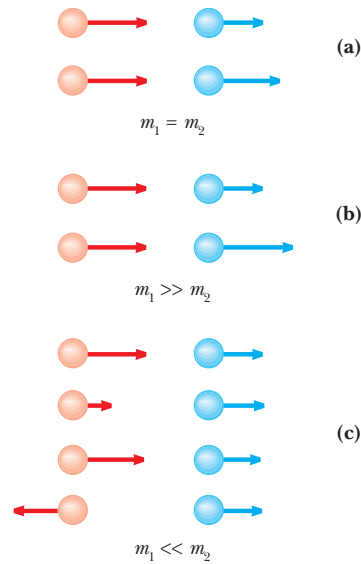


Figura 8.11

ESEMPIO 8.7 Trasferimento di energia tramite urti elastici

Una particella di massa m_1 urta elasticamente una particella di massa m_2 ferma. Calcolare la frazione di energia $f_{1,2}$ trasferita nell'urto alla seconda particella in funzione del rapporto delle masse m_1/m_2 delle stesse.

Soluzione Dalla 8.3 con $v_{2, \text{in}} = 0$:

$$v_{2, \text{fin}} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1, \text{in}} \quad , \quad \frac{1}{2} m_2 v_{2, \text{fin}}^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{1}{2} m_1 v_{1, \text{in}}^2 \quad .$$

per cui:

$$f_{1,2} = \frac{E_{k,2\text{fin}}}{E_{k,\text{in}}} = 4 \frac{m_1/m_2}{(1 + m_1/m_2)^2} \quad ,$$

e di conseguenza la frazione di energia rimasta al proiettile dopo l'urto è

$$f_1 = 1 - f_{1,2} = \left(\frac{1 - m_1/m_2}{1 + m_1/m_2} \right)^2 \quad .$$

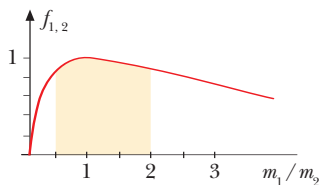


Figura 8.12

La funzione $f_{1,2}$ è riportata in figura 8.12. Il trasferimento massimo è ottenuto con $m_1 = m_2$ ($f_{1,2} = 1, f_1 = 0$) e si osserva che si ottiene un trasferimento di energia superiore al 90% nell'intervallo ($0.5 < m_1/m_2 < 2$).

Questa proprietà è sfruttata nei **reattori**, in cui neutroni vengono prodotti in un processo di dissociazione, **fissione**, dell'isotopo $^{235}_{92}\text{U}$ prodotta da un neutrone. I neutroni prodotti nella fissione sono veloci, con velocità $\approx 10^7$ m/s e devono essere rallentati fino a velocità dell'ordine di 10^3 m/s per potere innescare con maggiore probabilità altri eventi di fissione e instaurare la reazione a catena su cui si fonda il funzionamento di un reattore.

Per questo scopo i neutroni vengono rallentati facendoli passare attraverso una sostanza liquida o solida chiamata **moderatore**. Come moderatore veniva utilizzata, specialmente nei primi reattori, l'acqua pesante D_2O ; i nuclei leggeri di deuterio di massa $m_D \approx 2m_n$ fungono da bersaglio, figura 8.13, per i neutroni veloci, per cui in ciascun urto si ha una consistente frazione di energia trasferita ai nuclei di deuterio:

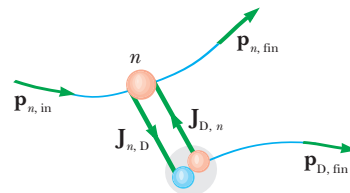


Figura 8.13

$$f_{1,2} = \frac{8}{9} \quad \text{e} \quad f_1 = \frac{1}{9} .$$

Volendo degradare la velocità dei neutroni di un fattore

$\approx 10^4$, l'energia del neutrone deve diminuire di un fattore 10^8 e di conseguenza in media è necessario un certo numero N di urti:

$$(f_1)^N \approx 10^{-8} \quad N \approx 8 .$$

8.4 URTO ANELASTICO

Questo è il caso più comune: i punti ritornano separati dopo l'urto, durante il quale si conserva la quantità di moto del sistema, se non agiscono forze esterne di tipo impulsivo, ma non l'energia cinetica. Una certa frazione di E'_k , energia cinetica prima dell'urto rispetto al centro di massa, viene assorbita.

Ciò è determinato, negli urti tra particelle reali, dal fatto che l'impulso della forza di interazione di una particella con l'altra risulta, nella fase di deformazione dei corpi, superiore a quello nella fase di ritorno dei corpi alla configurazione iniziale. Se l'urto fosse elastico i due impulsi sarebbero eguali (in modulo), mentre per un urto completamente anelastico il secondo sarebbe nullo.

Per chiarire meglio il processo, consideriamolo nel sistema di riferimento del centro di massa, figura 8.14. Il punto con quantità di moto $p'_{1, \text{in}}$ nell'istante precedente all'urto vede, per effetto dell'impulso nella fase di deformazione, ridursi progressivamente a zero la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva, sempre durante l'urto, il punto riacquista quantità di moto fino al valore $p'_{1, \text{fin}}$, opposto in verso e minore in modulo rispetto a $p'_{1, \text{in}}$. Si definisce **coefficiente di restituzione** il rapporto

$$e = -\frac{p'_{1, \text{fin}}}{p'_{1, \text{in}}} = -\frac{v'_{1, \text{fin}}}{v'_{1, \text{in}}} = -\frac{p'_{2, \text{fin}}}{p'_{2, \text{in}}} = -\frac{v'_{2, \text{fin}}}{v'_{2, \text{in}}} . \quad (8.4)$$

Ricordiamo che, essendo $P' = 0$, in modulo $p'_{1, \text{in}} = p'_{2, \text{in}}$ e $p'_{1, \text{fin}} = p'_{2, \text{fin}}$, per cui il coefficiente di restituzione è lo stesso anche per la seconda particella, come scritto in (8.4).

L'energia cinetica del sistema delle due particelle dopo l'urto è data da

$$E'_{k, \text{fin}} = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{fin}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{fin}} = e^2 \left(\frac{1}{2} m_1 v'^2_{1, \text{in}} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2, \text{in}} \right) \\ \Rightarrow E'_{k, \text{fin}} = e^2 E'_{k, \text{in}} .$$

La variazione relativa di energia cinetica rispetto al centro di massa nell'urto è

$$\delta = \frac{E'_{k, \text{fin}} - E'_{k, \text{in}}}{E'_{k, \text{in}}} = e^2 - 1 .$$

Nell'urto elastico $e = 1$, $\delta = 0$, l'energia cinetica si conserva. Nell'urto completamente anelastico $e = 0$, $\delta = -1$: tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata. Nella situazione di urto anelastico il coefficiente di restituzione e risulta compreso tra zero e uno, $E'_{k, \text{fin}}$ è sempre minore di $E'_{k, \text{in}}$.

La soluzione per le velocità finali nel sistema di riferimento inerziale, sempre nel caso di urto centrale come per l'urto elastico, risulta:

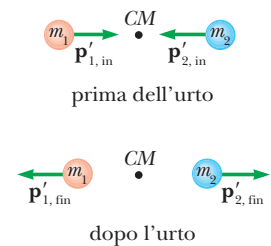


Figura 8.14

Urto anelastico tra due punti materiali nel sistema del centro di massa.

Coefficiente di restituzione

$$\begin{aligned}
 v_{1, \text{fin}} &= \frac{(m_1 - e m_2)v_{1, \text{in}} + m_2(1 + e)v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2} \\
 v_{2, \text{fin}} &= \frac{m_1(1 + e)v_{1, \text{in}} + (m_2 - e m_1)v_{2, \text{in}}}{m_1 + m_2} .
 \end{aligned}
 \tag{8.5}$$

Con $e = 1$ si ritorna alle (8.3), valide per l'urto elastico, mentre con $e = 0$ si ha $v_{1, \text{fin}} = v_{2, \text{fin}} = v_{CM}$, come è giusto per l'urto completamente anelastico.

ESEMPIO 8.8 Un urto anelastico tra due dischetti

Due dischetti di massa m_1 e $m_2 = 2m_1$ si muovono in un piano l'uno contro l'altro in modo tale che il loro centro di massa risulta fermo. Il primo dischetto ha velocità $v_1 = 20$ m/s. Nell'urto il 36% di energia cinetica viene persa. Calcolare la velocità dei due dischetti dopo l'urto.

Soluzione L'urto avviene nel sistema del centro di massa. Prima dell'urto:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0 \quad , \quad v_{2, \text{in}} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1, \text{in}} = -10 \text{ m/s} .$$

L'urto anelastico è caratterizzato dal parametro $\delta = -0.36$, per cui il coefficiente di restituzione è:

$$e^2 = 1 + \delta \quad \Rightarrow \quad e = 0.8 .$$

Dalla definizione del coefficiente di restituzione, in modulo:

$$v_{1, \text{fin}} = e v_{1, \text{in}} = 16 \text{ m/s} \quad , \quad v_{2, \text{fin}} = e v_{2, \text{in}} = 8 \text{ m/s} .$$

ESEMPIO 8.9 Un punto materiale che rimbalza sul pavimento

Un punto materiale, figura 8.15, cade, partendo con velocità iniziale nulla da un'altezza h_1 , sopra un piano orizzontale, rimbalza e risale all'altezza h_2 minore di h_1 . Calcolare il coefficiente di restituzione.

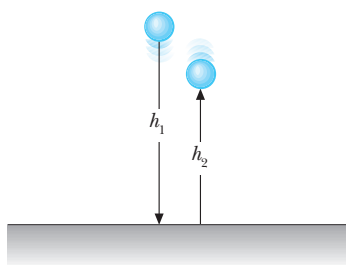


Figura 8.15

Soluzione La velocità un istante prima dell'urto è $v_{\text{in}} = \sqrt{2gh_1}$, quella un istante dopo l'urto è v_{fin} e il punto risale alla quota h_2 tale che $v_{\text{fin}} = -\sqrt{2gh_2}$, dove il segno meno tiene conto del fatto che v_{fin} è negativa. Dalle (8.5), nel caso limite di $v_{2, \text{in}} = 0$ e $m_2 = \infty$, si ricava $v_{\text{fin}} = -e v_{\text{in}}$. D'altra parte, proprio per la grandissima differenza di massa tra piano e punto, possiamo pensare che il centro di massa sia fermo e quindi che le velocità nel sistema del laboratorio e nel sistema del centro di massa siano eguali. Pertanto:

$$e = -\frac{v'_{\text{fin}}}{v'_{\text{in}}} = -\frac{v_{\text{fin}}}{v_{\text{in}}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} .$$

8.5

URTI TRA PUNTI MATERIALI E CORPI RIGIDI O TRA CORPI RIGIDI

Anche per questi urti il riferimento è sempre costituito dalle leggi di conservazione. Riassumendo sinteticamente, in un urto si può assumere la costanza dell'energia cinetica del sistema solo se si sa a priori che l'urto è elastico. Se agiscono solo forze interne, o quelle esterne non sono di tipo impulsivo, si conserva

la quantità di moto totale. Se invece esiste un vincolo che tiene fermo un punto del corpo rigido, e quindi sviluppa una forza esterna di tipo impulsivo durante l'urto, non si verifica la conservazione della quantità di moto. Infine, qualora rispetto a un certo polo, fisso in un sistema di riferimento inerziale o coincidente con il centro di massa, il momento delle forze esterne, comprese quelle vincolari, è nullo, si conserva il momento angolare rispetto a tale polo. Se agiscono solo forze interne \mathbf{L} si conserva sempre, indipendentemente dalla scelta del polo.

Quando il corpo urtato è vincolato, il sistema di vincoli può esplicare durante l'urto un sistema di forze che ha una risultante \mathbf{R} e un momento risultante \mathbf{M} . L'effetto complessivo, nel brevissimo tempo di durata dell'urto, è dato dall'impulso della forza $\mathbf{J} = \int \mathbf{R} dt$ e dall'impulso angolare $\int \mathbf{M} dt$, eguali rispettivamente alla variazione della quantità di moto e alla variazione del momento angolare del sistema.

Essendo la quantità di moto e il momento angolare grandezze vettoriali, è possibile trovare situazioni in cui la loro conservazione è parziale; per esempio, P_x e P_y si conservano, P_z cambia: questo vuol dire che l'impulso ha componenti J_x e J_y nulle, mentre J_z è diversa da zero. Analogamente per \mathbf{L} e l'impulso angolare.

ESEMPIO 8.10 Urto completamente anelastico tra un punto materiale e un'asta libera

Un'asta è ferma sopra un piano orizzontale liscio; la massa è m_1 , la lunghezza l . Un punto materiale, di massa m_2 e velocità \mathbf{v} perpendicolare all'asta, colpisce l'asta a distanza x dal centro O e vi resta attaccato, figura 8.16. Determinare la velocità lineare e quella angolare del sistema dopo l'urto.

Soluzione Durante l'urto, completamente anelastico, agiscono solo forze interne e pertanto si ha conservazione della quantità di moto \mathbf{P} e del momento angolare \mathbf{L} .

La conservazione di \mathbf{P} fornisce la velocità del centro di massa prima e dopo l'urto. Dopo l'urto coincide con quella del sistema asta più punto materiale attaccato all'asta:

$$m_2 \mathbf{v} = (m_1 + m_2) \mathbf{v}_{CM} \quad , \quad \mathbf{v}_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{v} \quad .$$

Determiniamo la posizione del centro di massa rispetto al centro dell'asta nell'istante in cui avviene l'urto:

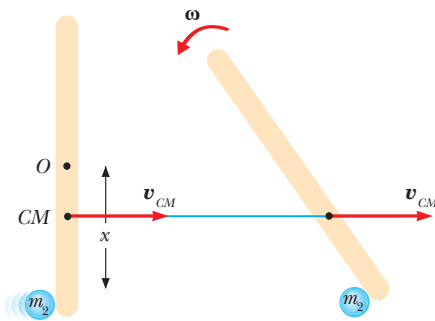


Figura 8.16

$$(m_1 + m_2)x_{CM} = m_2 x \quad \Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} x \quad .$$

Prima e dopo l'urto il centro di massa si muove lungo la linea tratteggiata in figura 8.16, con velocità \mathbf{v}_{CM} .

Per quanto riguarda la conservazione di \mathbf{L} , assumendo come polo il centro di massa possiamo scrivere

$$(x - x_{CM})m_2 v = I\omega \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2$$

e quindi

$$\omega = \frac{(x - x_{CM})m_2 v}{m_1 \frac{l^2}{12} + m_1 x_{CM}^2 + m_2 (x - x_{CM})^2} = \frac{m_2 x v}{(m_1 + m_2) \frac{l^2}{12} + m_2 x^2} \quad .$$

La rotazione avviene in senso antiorario. Se l'urto avesse luogo dall'altra parte rispetto al centro dell'asta il verso di rotazione sarebbe orario. Non si ha rotazione solo con un urto al centro dell'asta ($x = 0$, $\omega = 0$).

Dopo l'urto il centro di massa continua a muoversi con moto rettilineo uniforme, mentre gli altri punti hanno un moto composto da una traslazione con velocità \mathbf{v}_{CM} e da una rotazione, con velocità angolare ω , rispetto ad un asse verticale passante per il centro di massa.

$$\text{In particolare, se } m_1 = m_2 = m \quad , \quad x_{CM} = \frac{x}{2} \quad ,$$

$$v_{CM} = \frac{v}{2} \quad , \quad \omega = \frac{x v}{l^2/6 + x^2} \quad .$$

ESEMPIO 8.11 Urto completamente anelastico tra un punto materiale ed un'asta vincolata

Nell'esempio precedente assumiamo che l'asta sia vincolata ad un estremo, attorno al quale può ruotare senza attrito, figura 8.17. Per semplicità sia $m_1 = m_2 = m$; indichiamo con r la distanza del punto d'impatto dall'estremo fisso. Determinare la velocità angolare ω del sistema asta più punto materiale dopo l'urto e l'impulso della reazione vincolare durante l'urto.

Soluzione In questo caso non possiamo conservare la quantità di moto del sistema, in quanto durante l'urto agisce una forza esterna di tipo impulsivo esplicita dal vincolo. È possibile però conservare il momento angolare rispetto al punto fisso perché il momento delle forze vincolari è nullo rispetto a tale polo:

$$r m v = I \omega \quad , \quad I = m \frac{l^2}{3} + m r^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{r v}{l^2/3 + r^2} .$$

Durante l'urto la quantità di moto del sistema varia per effetto dell'impulso \mathbf{J} delle forze vincolari:

$$\mathbf{J} = \Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_{\text{fin}} - \mathbf{P}_{\text{in}} .$$

$\mathbf{P}_{\text{in}} = m \mathbf{v}$ mentre \mathbf{P}_{fin} può essere calcolata come somma delle quantità di moto del punto e dell'asta o come quantità di moto del centro di massa del sistema, nell'istante successivo all'urto. Nel primo caso:

$$\mathbf{P}_{\text{fin}} = m \omega r \mathbf{u}_v + m \omega \frac{l}{2} \mathbf{u}_v = m \left(r + \frac{l}{2} \right) \omega \mathbf{u}_v ,$$

dove ωr è la velocità del punto, $\omega \frac{l}{2}$ la velocità del centro di massa dell'asta, subito dopo l'urto, e \mathbf{u}_v è il versore della velocità \mathbf{v} del punto prima dell'urto. Con la seconda procedura, bi-

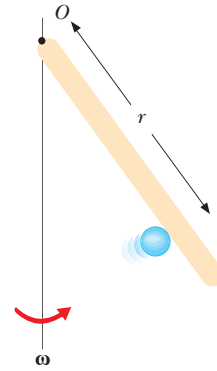


Figura 8.17

sogna prima calcolare la posizione del centro di massa del sistema nell'istante dell'urto:

$$x_{CM} = \frac{m \frac{l}{2} + m r}{2 m} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{l}{2} \right)$$

e quindi $\mathbf{P}_{\text{fin}} = 2 m \mathbf{v}_{CM} = 2 m x_{CM} \omega \mathbf{u}_v = m \left(r + \frac{l}{2} \right) \omega \mathbf{u}_v$. Solo durante l'urto \mathbf{P}_{fin} e \mathbf{P}_{in} hanno la stessa direzione, dopo \mathbf{P} cambia anche di direzione.

Pertanto l'impulso della reazione vincolare è dato da

$$\mathbf{J} = m \left[\omega \left(r + \frac{l}{2} \right) - v \right] \mathbf{u}_v = m l v \frac{\frac{r}{2} - \frac{l}{3}}{\frac{l^2}{3} + r^2} \mathbf{u}_v .$$

ESEMPIO 8.12 Un punto materiale cade su un disco in rotazione

Un disco, di massa m_1 e raggio R , ruota con velocità angolare ω in un piano orizzontale attorno ad un asse verticale passante per il centro. Da un'altezza h viene lasciato cadere sul disco un punto materiale di massa m_2 , figura 8.18. Il punto urta il disco ad una distanza $d < R$ dal centro del disco e vi rimane attaccato. Determinare la velocità angolare del sistema nell'istante successivo all'urto, l'impulso e l'impulso angolare delle reazioni vincolari.

Soluzione Nell'urto si conserva la componente del momento angolare parallela all'asse di rotazione non essendoci momenti esterni con questa direzione. Invece il momento angolare del punto materiale, ortogonale all'asse di rotazione, viene annullato nell'urto dal momento esplicito dai supporti vincolari dell'asse, che impediscono la modifica dell'asse di ro-

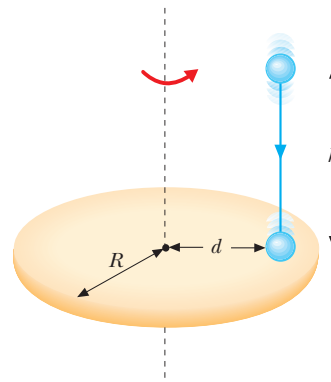


Figura 8.18

tazione. Ovviamente non si conservano quantità di moto e energia.

Assumendo come polo il centro del disco abbiamo

$$I\omega = (I + m_2 d^2) \omega' \quad , \quad I = \frac{1}{2} m_1 R^2$$

$$\omega' = \frac{m_1 R^2}{2 m_1 R^2 + 2 m_2 d^2} \omega ;$$

la rotazione prosegue in verso antiorario anche dopo l'urto.

L'impulso delle reazioni vincolari si calcola tramite la variazione della quantità di moto del sistema e quindi del punto di massa m_2 , avendo il disco sempre quantità di moto nulla. Esso ha due componenti, una verticale diretta verso l'alto do-

vuta all'arresto di m_2 , una orizzontale diretta verso il lettore dovuta all'inizio della rotazione di m_2 ; in modulo

$$J_z = m_2 v_{2,\text{in}} = m_2 \sqrt{2gh} \quad , \quad J_{\text{or}} = m_2 v_{2,\text{fin}} = m_2 \omega' d .$$

L'impulso angolare delle reazioni vincolari è eguale alla variazione della componente del momento angolare ortogonale all'asse di rotazione (abbiamo detto che la componente parallela si conserva) e quindi al $\Delta \mathbf{L}_\perp$ della massa m_2 :

$$\int \mathbf{M} dt = (\mathbf{L}_\perp)_{\text{fin}} - (\mathbf{L}_\perp)_{\text{in}} = -\mathbf{OP} \times m_2 v_{2,\text{in}} ,$$

essendo \mathbf{OP} il raggio vettore dal centro del disco al punto di impatto. In modulo l'impulso angolare vale $m_2 d v_{2,\text{in}} = m_2 d \sqrt{2gh}$.

ESEMPIO 8.13 Un punto materiale cade su un'asta

Un'asta, di massa m_1 e lunghezza l , è libera di ruotare in un piano verticale attorno ad un asse orizzontale passante per il suo centro. Inizialmente l'asta è in quiete in posizione orizzontale. Un punto materiale, di massa m_2 , colpisce con velocità \mathbf{v} , ortogonale all'asta in direzione verticale, l'estremo dell'asta, figura 8.19. Assumendo che l'urto sia elastico e che la velocità \mathbf{v}' del punto materiale dopo l'urto sia parallela a \mathbf{v} , determinare nell'istante successivo all'urto la velocità angolare ω dell'asta e il modulo e il verso di \mathbf{v}' .

Soluzione Data la presenza di una forza vincolare in O non è possibile conservare la quantità di moto; possiamo però conservare rispetto ad O il momento angolare e, dato che l'urto è elastico, possiamo utilizzare la conservazione dell'energia. Pertanto, assumendo v' positiva se ha il verso indicato in figura,

$$m_2 v \frac{l}{2} = I\omega - m_2 v' \frac{l}{2} \quad , \quad I = m_1 \frac{l^2}{12} \quad ;$$

$$\frac{1}{2} m_2 v^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m_2 v'^2 .$$

Risolviendo il sistema si trova

$$\omega = \frac{12 m_2}{m_1 + 3 m_2} \frac{v}{l} \quad , \quad v' = \frac{m_1 - 3 m_2}{m_1 + 3 m_2} v .$$

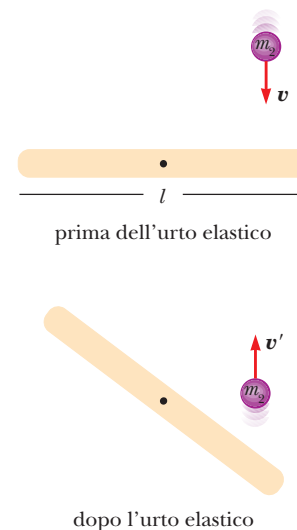


Figura 8.19

Il punto materiale prosegue il suo moto nello stesso verso se $3 m_2 > m_1$ ($v' < 0$), rimbalza se $3 m_2 < m_1$ ($v' > 0$), si ferma nell'istante dell'urto se $3 m_2 = m_1$ ($v' = 0$).

ESEMPIO 8.14 Due dischi si scontrano

Un disco, di massa m e raggio R , scivola con velocità \mathbf{v} su un piano orizzontale liscio. Esso urta un altro disco identico, inizialmente in quiete e con il centro a distanza R dalla retta percorsa dal centro del primo disco, vedi figura 8.20. Dopo l'urto

i due dischi restano attaccati e procedono come un unico corpo rigido. Determinare che velocità angolare deve avere il primo disco affinché dopo l'urto la velocità angolare del sistema sia nulla.

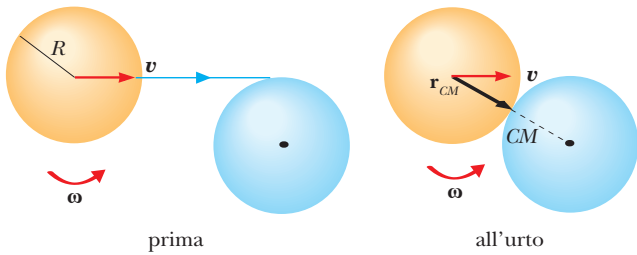


Figura 8.20

Soluzione Nell'urto si conserva il momento angolare, rispetto a qualsiasi polo. Prendendo come polo il centro di massa del sistema e volendo che dopo l'urto il moto sia traslatorio, abbiamo $L_{fin} = 0$; quindi, rispetto al centro di massa, deve

essere $L_{in} = 0$. Prima dell'urto solo il disco in movimento contribuisce al momento angolare, per cui abbiamo

$$L_{in} = I\omega + r_{CM} \times m\mathbf{v} ,$$

secondo il teorema di König; $I\omega$ è il momento angolare del disco rispetto al proprio centro di massa ($I = \frac{1}{2} m R^2$), $r_{CM} \times m\mathbf{v}$ è il momento angolare del centro di massa del disco rispetto al centro di massa del sistema e vale in modulo $R/2 m v$ (il centro di massa del sistema dista $R/2$ dalla retta individuata da \mathbf{v}). Si osservi che $r_{CM} \times m\mathbf{v}$ è diretto verso il foglio; se $L_{in} = 0$, $I\omega$ deve essere diretto verso il lettore, cioè il primo disco deve ruotare in senso antiorario. Allora in modulo

$$I\omega - \frac{R}{2} m v = 0 \quad , \quad \text{per cui} \quad \omega = \frac{v}{R} .$$

Quando due corpi estesi si urtano, come è il caso dell'esempio 8.14, ma non restano attaccati, le quantità di moto dopo l'urto formano normalmente un certo angolo con la direzione che avevano prima dell'urto. Infatti la forza interna impulsiva $\mathbf{F}_{2,1}$ agente sul primo corpo non è parallela a $\mathbf{p}_{1,in}$ e quindi $\mathbf{p}_{1,fin}$ risulta deviata rispetto alla direzione iniziale del moto; lo stesso succede per il secondo corpo. La situazione è mostrata qualitativamente in figura 8.21 riferita a due dischetti che non ruotano prima dell'urto. Essi non ruotano nemmeno dopo se non c'è attrito al contatto, cioè se le forze interne non hanno componente tangente. Altrimenti il momento dell'attrito mette in rotazione i dischetti.

Solo se i centri dei due dischetti si muovono lungo la stessa retta non si ha deviazione e si parla di urto centrale; l'urto della figura 8.21 non è centrale.

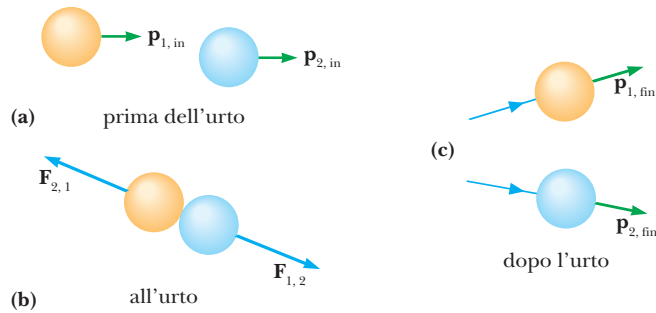


Figura 8.21

Urto tra due dischetti che si muovono in un piano orizzontale.

RIEPILOGO

Nell'urto tra due punti materiali di massa m_1 e m_2 si esercitano per tempi brevi forze interne di tipo impulsivo che modificano le quantità di moto di ciascuno lasciando costante la quantità di moto totale:

$$m_1\mathbf{v}_{1,in} + m_2\mathbf{v}_{2,in} = (m_1 + m_2)\mathbf{v}_{CM} = m_1\mathbf{v}_{1,fin} + m_2\mathbf{v}_{2,fin} . \quad (8.1)$$

La velocità del centro di massa v_{CM} rimane costante così pure la sua energia cinetica $E_{k,CM}$. Ciò che può variare è l'energia cinetica rispetto al centro di massa:

$$E'_k = \frac{1}{2} m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2} m_2 v'^2_2 ,$$

dove $v'_i = v_i - v_{CM}$ è la velocità relativa al centro di massa.

Nell'**urto elastico** anche l'energia cinetica totale si conserva, per cui le due relazioni:

$$\mathbf{P}_{in} = \mathbf{P}_{fin} \quad E_{k,in} = E_{k,fin} ,$$

permettono di ricavare la condizione finale dopo l'urto dalle condizioni iniziali prima dello stesso.

Nell'**urto completamente anelastico** i due corpi dopo l'urto rimangono attaccati, per formare un unico punto di massa ($m_1 + m_2$) che si muove con la velocità del centro di massa:

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} .$$

Dopo l'urto non c'è più moto rispetto al centro di massa, per cui l'energia $E'_{k,fin} = 0$, ovvero si ha una diminuzione di energia cinetica pari all'energia cinetica rispetto al centro di massa $E'_{k,in}$:

$$\begin{aligned} \Delta E_k &= E_{k,fin} - E_{k,in} = -E'_{k,in} = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v_{CM}^2 - \left(\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \right) . \end{aligned}$$

Questa energia rappresenta il lavoro compiuto contro forze interne non conservative per far compenetrare le due masse.

Negli **urti anelastici** in generale si ha una diminuzione di energia cinetica rispetto al centro di massa esprimibile come:

$$\delta = \frac{E'_{k,fin} - E'_{k,in}}{E'_{k,in}} = e^2 - 1 ,$$

con $e^2 = E'_{k,fin} / E'_{k,in}$ **coefficiente di restituzione** che varia tra $e = 1$, $\delta = 0$, urto elastico, ed $e = 0$, $\delta = -1$, urto completamente anelastico.

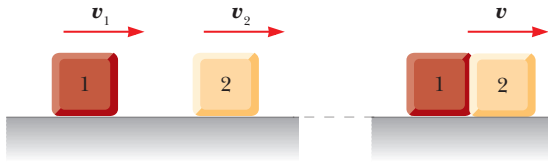
QUESITI

- 8.1 L'energia cinetica di un sistema di due particelle può sempre essere scritto come somma dell'energia cinetica del moto del centro di massa e dell'energia delle particelle rispetto al centro di massa. Cosa rimane sempre costante nell'urto tra le due particelle indipendentemente dal tipo di urto?
- 8.2 In un urto in cui il centro di massa sia fermo è possibile che l'energia cinetica si perda?
- 8.3 Per sapere l'impulso trasferito in un urto è sufficiente conoscere la forza media che agisce durante l'urto?
- 8.4 Un'automobile di massa m_A e un camion di massa $m_C = 10m_A$ si scontrano frontalmente mentre procedono alla stessa velocità. In che rapporto stanno: le forze F che agiscono sui due veicoli, gli impulsi J , le variazioni di velocità e le accelerazioni acquistate?
- 8.5 In un urto frontale elastico tra due particelle la velocità relativa di allontanamento delle particelle dopo l'urto è la stessa della velocità di avvicinamento prima dell'urto?
- 8.6 In un urto frontale elastico tra due particelle di massa diversa l'energia cinetica di ciascuna particella è la stessa prima e dopo l'urto? Cosa si può dire quando hanno la stessa massa?
- 8.7 Per rallentare un neutrone tramite urti elastici con materiali è opportuno che il materiali sia costituito da materiali leggeri o pesanti?
- 8.8 In un urto completamente anelastico qual è l'energia che va dissipata?
- 8.9 Che cos'è il coefficiente di restituzione e in un urto? Esso dà una misura della percentuale di energia cinetica $\Delta E_k / E_k$ persa nell'urto?
- 8.10 Una palla di neve viene lanciata contro una parete rimanendo attaccata. Che succede della quantità di moto della palla di neve?
- 8.11 In un pendolo balistico se la velocità del proiettile raddoppia di quanto varia l'altezza raggiunta dal blocco di legno dopo l'urto?
- 8.12 Una sfera che rotola sopra un piano orizzontale urta contro una parete verticale liscia. Durante l'urto si conserva la quantità di moto della sfera? Si conserva il momento angolare della sfera rispetto al suo centro di massa?

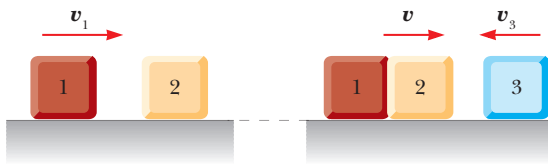
PROBLEMI

- 8.1 Un corpo di massa $m_1 = 0.2$ kg in moto con velocità $v_1 = 3$ m/s lungo un asse x orizzontale urta in modo completamente anelastico contro un corpo di massa $m_2 = 0.3$ kg e velocità $v_2 = 2$ m/s equiversa a v_1 . Calcolare: a) la velocità

v del sistema $m_1 + m_2$ dopo l'urto, b) la variazione della energia cinetica nell'urto.



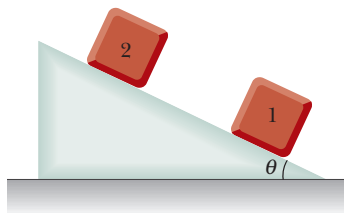
- 8.2 Un corpo di massa $m_1 = 0.2$ kg in moto con velocità $v_1 = 4$ m/s lungo un asse x orizzontale urta in modo completamente anelastico contro un corpo di massa $m_2 = 0.3$ kg fermo. Calcolare: a) la velocità v del sistema $m_1 + m_2$ dopo l'urto, b) che energia cinetica deve avere un corpo di massa $m_3 = 0.25$ kg, in moto con velocità v_3 contraria alla velocità v del sistema $m_1 + m_2$, affinché dopo un urto completamente anelastico il sistema $m_1 + m_2 + m_3$ resti in quiete.



- 8.3 Tre blocchetti di massa $m_1 = 1$ kg, $m_2 = 4$ kg, $m_3 = 3$ kg stanno su un asse orizzontale liscio. Il blocchetto m_1 ha velocità $v_1 = 2$ m/s, il blocchetto m_2 è fermo, il blocchetto m_3 ha velocità $v_3 = -1$ m/s. In uno stesso dato istante i blocchetti m_1 e m_3 urtano il blocchetto m_2 , provenendo da versi opposti rispetto alla sua posizione, e vi restano attaccati. Calcolare: a) la velocità del sistema dopo l'urto, b) la variazione della quantità di moto di m_1 nell'urto; c) la variazione dell'energia cinetica di m_3 nell'urto.



- 8.4 Lungo un piano inclinato ($\theta = 30^\circ$) vengono fatti scendere due cubi di eguale massa $m = 2$ kg, con diverso coefficiente di attrito con il piano ($\mu_1 = 0.4$ per quello a valle, $\mu_2 = 0.2$ per quello a monte). I cubi, inizialmente fermi e distanti $d = 1$ m, vengono liberati simultaneamente all'istante $t = 0$. Calcolare: a) dopo quanto tempo si urtano, b) la velocità del sistema immediatamente dopo il contatto se i cubi rimangono attaccati, c) l'accelerazione con cui scende il sistema dopo l'urto, d) la forza F che il cubo a monte esercita su quello a valle.



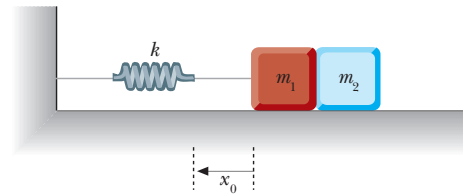
- 8.5 Un corpo puntiforme si muove lungo un asse orizzontale. All'istante $t = 0$ esso passa nell'origine con velocità $v_0 = 3.317$ m/s, diretta verso le x positive. Per $t > 0$ il corpo è sottoposto a un'accelerazione $a(x) = -5x - 3$ m/s². Calcolare: a) dove si ferma. Se durante il moto, nella posizione $x = 0.4$ m, il corpo ne urta uno eguale e fermo e vi rimane attaccato, calcolare: b) la velocità del sistema subito dopo l'urto.

- 8.6 In un esperimento tipo pendolo balistico il proiettile ha massa $m = 0.1$ kg e velocità $v = 200$ m/s e penetra nel corpo in un tempo $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ s; la massa totale dopo l'urto è $M = 10$ kg. Calcolare: a) di quanto si alza il pendolo, b) il valore della forza media durante l'urto.

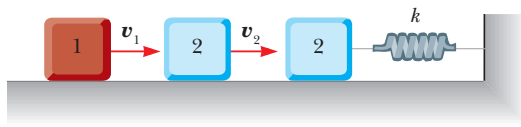
- 8.7 Due particelle di eguale massa m e velocità $v_1 = 3\mathbf{u}_x + 6\mathbf{u}_y$, $v_2 = 5\mathbf{u}_x - 4\mathbf{u}_y$ compiono un urto completamente anelastico. Calcolare dopo l'urto la velocità v_f e il suo modulo.

- 8.8 Una massa $M = 0.5$ kg, poggiata su un piano orizzontale liscio, è collegata tramite una molla ($k = 450$ N/m) ad una parete rigida. Essa esegue delle oscillazioni armoniche di ampiezza $A = 20$ cm. Quando si trova nel punto di massima elongazione più lontano dalla parete, M viene colpita da una massa $m = 0.1$ kg che si muove con velocità $v = 18$ m/s lungo l'asse della molla. Dopo l'urto le due masse restano unite. Calcolare: a) la velocità del sistema delle due masse subito dopo l'urto, b) l'ampiezza A' delle oscillazioni dopo l'urto.

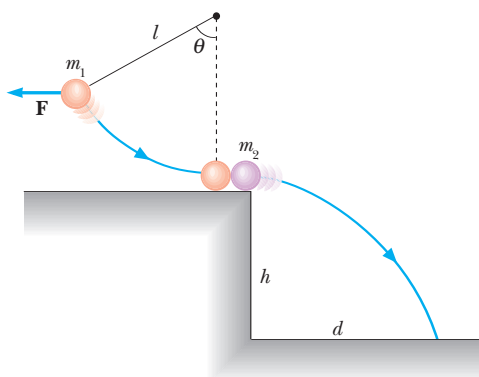
- 8.9 Sopra un piano orizzontale liscio sono posti due punti materiali, di masse $m_1 = 0.15$ kg e $m_2 = 0.37$ kg, a contatto tra loro. Il punto m_1 è attaccato ad una molla di costante elastica k , in condizioni di riposo. Si sposta verso sinistra, comprimendo la molla, il punto m_1 di una quantità $x_0 = 12$ cm, mentre m_2 resta fermo, e lo si lascia libero con velocità nulla. Il punto m_1 ritorna verso il punto m_2 e lo urta in modo completamente anelastico. Calcolare lo spostamento massimo verso destra del sistema.



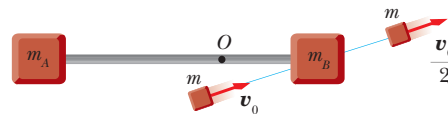
- 8.10 Due punti materiali si muovono su un piano orizzontale liscio con velocità tra loro parallele e concordi, di valore $v_1 = 10$ m/s e $v_2 = 5$ m/s; le masse dei due punti sono eguali, di valore $m = 0.5$ kg. Ad un certo istante i due punti si urtano elasticamente. Calcolare, dopo l'urto: a) la velocità di m_2 rispetto a m_1 . Il secondo punto, dopo l'urto, si aggancia all'estremo di una molla di costante elastica k , fissata nell'altro estremo. Si osserva che il punto compie oscillazioni armoniche di ampiezza $A = 0.38$ m. Calcolare: b) il valore di k .



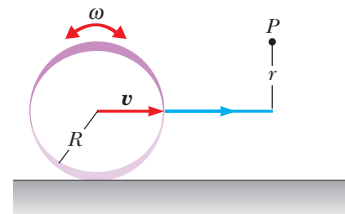
- 8.11 Un punto materiale di massa $m_A = 2$ kg si muove su un piano orizzontale liscio; esso urta elasticamente un secondo punto di massa m_B inizialmente fermo. Dopo l'urto i due punti hanno velocità uguali ed opposte. Calcolare il valore della massa m_B .
- 8.12 Una particella di massa m e velocità $v_0 = 7$ m/s colpisce una seconda particella di uguale massa ed inizialmente ferma. Dopo l'urto, considerato elastico, la prima particella si muove lungo una direzione che forma un angolo $\theta = 35^\circ$ rispetto alla direzione iniziale, assunta come asse x , con una velocità $v_1 = 5.2$ m/s. Determinare il modulo e la direzione della velocità v_2 della seconda particella.
- 8.13 Due punti materiali B e C a contatto, di massa m , vengono urtati elasticamente da un terzo punto A di pari massa, che si muove lungo la direzione x con velocità $v_0 = 5$ m/s. Dopo l'urto la velocità del punto A è lungo l'asse x , mentre B e C si muovono lungo due direzioni, che formano un angolo $\theta_B = +30^\circ$ e $\theta_C = -30^\circ$ con tale asse. Calcolare le velocità dei tre punti dopo l'urto.
- 8.14 Un punto materiale di massa m si muove lungo un asse orizzontale liscio con velocità v ed urta un secondo punto di uguale massa, inizialmente fermo. Dopo l'urto entrambi i punti si muovono lungo lo stesso asse e in particolare il secondo punto si muove con una velocità relativa al primo pari a $0.7v$. Calcolare il coefficiente di restituzione dell'urto e .
- 8.15 Un pendolo semplice, di massa $m_1 = 0.2$ kg e lunghezza $l = 0.5$ m, è tenuto in equilibrio statico ad angolo $\theta = 60^\circ$ rispetto alla verticale da una forza orizzontale F . Calcolare: a) il modulo di F . Si rimuove F e il pendolo è lasciato libero di oscillare. Quando raggiunge la verticale urta contro un punto materiale di massa $m_2 = 0.1$ kg, fermo sul bordo di un gradino alto $h = 0.6$ m. Dopo l'urto l'ampiezza di oscillazione del pendolo è $\theta^* = 30^\circ$ mentre m_2 cade sotto l'azione della forza peso. Calcolare: b) la velocità di m_2 subito dopo l'urto, c) la gittata d .



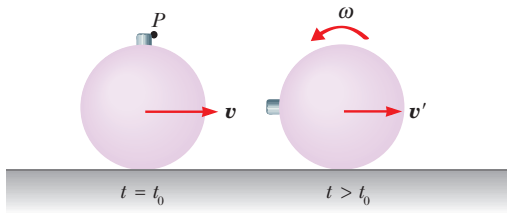
- 8.16 Si consideri un sistema costituito da due corpi A e B puntiformi, di massa $m_A = 150$ g ed $m_B = 350$ g, disposti agli estremi di un'asta, di massa trascurabile e lunghezza d . Il sistema è libero di ruotare senza attrito nel piano verticale, attorno ad una asse orizzontale passante per O . Le distanze dei due punti dal punto O sono $d_A = 70$ cm e $d_B = 30$ cm. Inizialmente il sistema è in quiete in posizione orizzontale. Ad un certo istante un proiettile di massa $m = 70$ g e velocità $v_0 = 20$ m/s, inclinata di un angolo $\theta = 20^\circ$ rispetto alla direzione AB , colpisce il corpo B , attraversandolo ed uscendone con una velocità $v_0/2$ e con la stessa direzione di entrata. Per effetto dell'urto il sistema inizia a ruotare. Calcolare: a) la velocità angolare ω_0 del sistema immediatamente dopo l'urto, b) la velocità v_A del corpo A quando raggiunge la posizione più bassa A_1 , c) la componente media orizzontale F_x e verticale F_y della forza impulsiva durante l'urto, assunto di durata $\Delta t = 0.02$ s.



- 8.17 Un disco omogeneo di massa $M = 0.5$ kg e raggio $R = 20$ cm ruota in un piano orizzontale intorno al suo asse di simmetria con velocità angolare $\omega_0 = 30$ rad/s. Un proiettile di massa $m = 60$ g viene sparato, con direzione parallela all'asse di rotazione, sul bordo del disco, perpendicolarmente al piano del disco. Il proiettile, la cui velocità è $v_0 = 20$ m/s, dopo l'urto rimane conficcato nel disco. Calcolare: a) la velocità angolare ω_1 del sistema dopo l'urto, b) il lavoro W delle forze non conservative durante l'urto.
- 8.18 Un anello di raggio $R = 22$ cm scivola su un piano orizzontale liscio con velocità $v = 3.6$ m/s e contemporaneamente ruota rispetto al proprio centro con velocità angolare ω . Ad un certo istante esso urta contro un piolo P conficcato nel piano e vi rimane agganciato, in modo tale da poter eventualmente ruotare attorno al piolo; in realtà si verifica che, se la distanza r vale 16 cm, dopo l'urto l'anello resta in quiete. Calcolare: a) il modulo, b) il verso della velocità angolare.



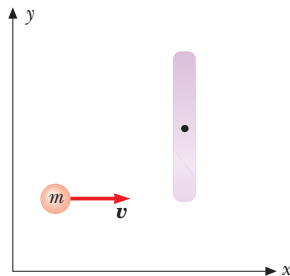
- 8.19 Un disco di massa m e raggio R scivola senza attrito su un piano orizzontale con velocità v . Ad un certo istante t_0 un dentino posto sul bordo del disco urta contro un punto fisso P . Supponendo l'urto elastico calcolare dopo l'urto: a) la velocità v' , b) la velocità angolare ω .



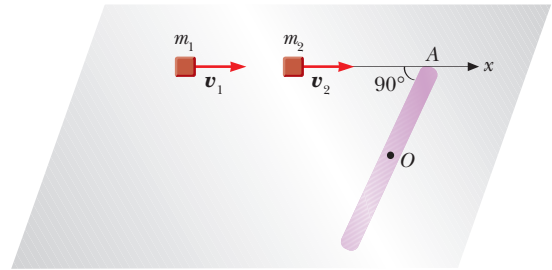
- 8.20 Una sbarra rettilinea si trova in quiete sopra un piano orizzontale liscio; la sua lunghezza è $l = 1$ m, la massa è $m = 3$ kg. Mediante un colpo di martello dato a un estremo viene comunicato alla sbarra un impulso $J = 5$ Ns, con direzione e verso come in figura. Calcolare: a) la velocità del centro di massa della sbarra, b) la velocità angolare ω della sbarra, c) l'energia cinetica della sbarra.



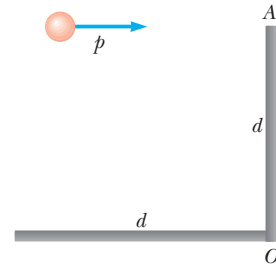
- 8.21 Una sbarra rigida di sezione trascurabile, lunga $l = 1$ m e di massa $M = 12$ kg, è impernata nel centro ed è libera di ruotare in un piano orizzontale. Contro un suo estremo viene lanciato un oggetto di dimensioni trascurabili e di massa $m = 1$ kg, con velocità $\mathbf{v} = 2\mathbf{u}_x$ m/s; la sbarra è orientata secondo l'asse y . Dopo l'urto l'oggetto rimbalza con velocità $\mathbf{v}' = -0.5\mathbf{u}_x$ m/s. Calcolare: a) la velocità angolare ω della sbarra dopo l'urto, b) le componenti dell'impulso \mathbf{J} comunicato al perno. Si supponga che, con le stesse condizioni iniziali, l'urto avvenga elasticamente. Calcolare in tal caso: c) ω' e \mathbf{J}' .



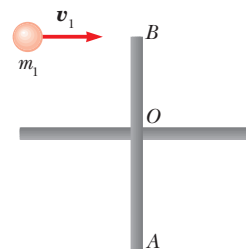
- 8.22 Due punti di massa $m_1 = 0.4$ kg e $m_2 = 0.7$ kg si muovono lungo uno stesso asse x orizzontale liscio; il punto m_1 ha la velocità $v_1 = 3$ m/s ed il punto m_2 ha la velocità $v_2 = 2$ m/s, concorde a v_1 . Ad un certo istante m_1 urta in modo completamente anelastico m_2 . Dopo l'urto i due punti proseguono lungo l'asse x ed urtano, restandovi attaccati, l'estremo A di un'asta ferma in un piano orizzontale. L'asta, ortogonale all'asse x , può ruotare senza attrito attorno ad un asse verticale passante per il suo centro O ; la massa dell'asta è $m_3 = 1.8$ kg, la lunghezza è $d = 0.8$ m. Calcolare: a) il momento angolare rispetto ad O del sistema $m_1 + m_2$ prima dell'urto, b) la velocità angolare del sistema dopo l'urto, c) il modulo della quantità di moto del sistema dopo l'urto.



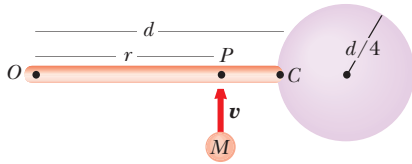
- 8.23 Due aste eguali, ciascuna di massa $m = 2$ kg e lunghezza $d = 0.6$ m, sono fissate tra loro come mostrato in figura; esse sono poste in un piano orizzontale e possono ruotare attorno ad un punto O , che è fisso. Un proiettile avente una quantità di moto $p = 5.2$ Ns colpisce l'estremo A e vi resta conficcato. Si suppone che la massa del proiettile sia trascurabile rispetto alla massa delle aste. Calcolare: a) la velocità angolare del sistema dopo l'urto, b) il modulo della quantità di moto del sistema dopo l'urto.



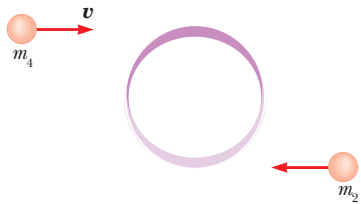
- 8.24 Due aste eguali, ciascuna di massa $m_2 = 0.72$ kg e lunghezza $d = 0.8$ m, sono fissate tra loro come mostrato in figura (stesso centro, angolo $\pi/2$); esse stanno in un piano verticale e possono ruotare attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il loro centro O e ortogonale al piano che le contiene. Inizialmente le aste sono in quiete, con l'asta AB verticale. Un proiettile puntiforme, avente massa $m_1 = 0.15$ kg e velocità v_1 , in moto lungo la linea orizzontale tratteggiata, colpisce l'estremo B e vi resta conficcato. A seguito dell'urto il sistema entra in rotazione con velocità angolare iniziale $\omega_0 = 5$ rad/s. Calcolare: a) il valore di v_1 . Nell'istante in cui è stato compiuto un quarto di giro, per cui l'asta AB è orizzontale, la velocità angolare vale $\omega = 5.6$ rad/s. Calcolare: b) il valore del momento di attrito M costante che agisce sull'asse di rotazione, c) sempre nello stesso istante in cui $\omega = 5.6$ rad/s, le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione della massa m_1 .



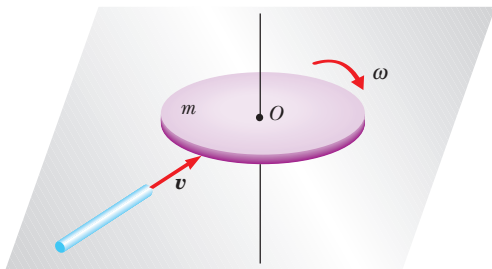
- 8.25** Un corpo rigido, formato da un'asta di massa $m = 1.5$ kg e lunghezza d e da un disco di eguale massa e raggio $R = d/4$, è posato sopra un piano orizzontale su cui può muoversi senza attrito ed è inizialmente in quiete. Un punto materiale, di massa $M = 0.4$ kg, in moto con velocità $v = 10$ m/s, urta il corpo rigido nel punto P distante $r = 7d/8$ dall'estremo O e vi resta attaccato. Nell'ipotesi che sul corpo non agisca alcun vincolo: a) descrivere il moto del sistema corpo-punto dopo l'urto, precisando se si tratta di moto traslatorio, rotatorio o rototraslatorio, b) calcolare la velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto. Se invece il corpo è vincolato in O , attorno a cui può ruotare, calcolare: c) la velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto, d) l'impulso subito dal perno in O durante l'urto.



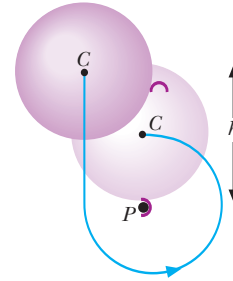
- 8.26** Un anello, di massa $m_3 = 2.5$ kg e raggio $R = 30$ cm, è inizialmente fermo in un piano orizzontale liscio. Due punti materiali, di masse $m_1 = 2$ kg e $m_2 = 0.5$ kg, si muovono con la stessa velocità $v = 4$ m/s secondo la direzione indicata in figura. Ad un certo istante entrambi toccano l'anello e vi rimangono attaccati. Calcolare: a) la velocità del centro di massa del sistema dopo l'urto, b) la velocità angolare ω del sistema.



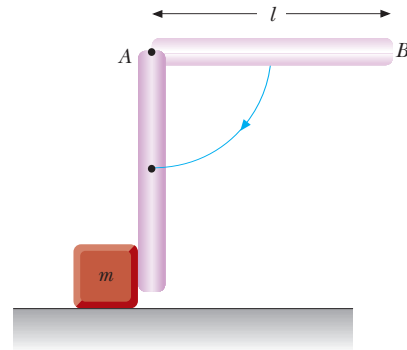
- 8.27** Sopra un piano orizzontale liscio è posto un disco, di massa $m = 0.1$ kg e raggio $R = 10$ cm, che ruota con velocità angolare costante $\omega = 40$ rad/s attorno ad un asse verticale passante per il centro O . Una sbarretta di massa m e lunghezza R si muove sul piano con velocità costante $v = 4$ m/s lungo una linea retta passante per O . Ad un certo istante la sbarretta urta il bordo del disco e vi rimane attaccata, in direzione radiale. Se l'asse di rotazione è fisso, calcolare: a) la velocità angolare ω' del sistema disco-sbarretta dopo l'urto. Se invece il disco è libero di muoversi, calcolare dopo l'urto: b) la velocità del CM del sistema, c) la velocità angolare ω'' .



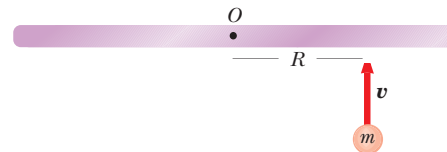
- 8.28** Un disco di raggio $r = 0.4$ m è mantenuto fermo in un piano verticale; all'istante $t = 0$ esso viene lasciato cadere. Quando ha percorso una distanza h il disco viene agganciato sul bordo ad un asse fisso orizzontale, ortogonale al disegno e passante per P , attorno a cui ruota senza attrito. Calcolare: il valore di h necessario affinché il disco compia una rotazione di 270° , fermandosi in tale posizione.



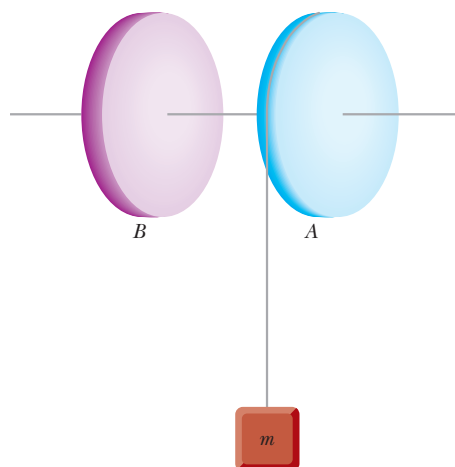
- 8.29** Un'asta AB , di lunghezza $l = 1.2$ m e massa $M = 0.5$ kg, è incernierata nel suo estremo A ad un perno fisso orizzontale e può oscillare senza attrito in un piano verticale. Nell'istante $t = 0$ l'asta, che è in quiete in posizione orizzontale, viene lasciata libera da ruotare. Raggiunta la posizione verticale l'asta urta un piccolo oggetto, inizialmente fermo, di massa $m = 0.25$ kg, che parte con velocità v_0 orizzontale, mentre l'asta si ferma. Calcolare: a) la velocità angolare dell'asta un istante prima dell'urto, b) la velocità v_0 , c) l'energia cinetica dissipata nell'urto e d) l'impulso durante l'urto.



- 8.30** Un'asta lunga $l = 1.2$ m può ruotare, in un piano verticale, attorno al proprio centro O ; la massa dell'asta vale $M = 2.5$ kg. Un punto materiale di massa $m = 0.25$ kg, lanciato verticalmente dal basso verso l'alto, colpisce l'asta a distanza $R = 0.4$ m da O e rimane ad essa attaccato; la velocità di m all'istante dell'urto vale $v = 20$ m/s. Calcolare: a) la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, b) la variazione di energia cinetica del sistema nell'urto e c) la velocità angolare del sistema quando ha compiuto una rotazione di 90° .



8.31 Due dischi identici, di massa $M = 5 \text{ kg}$ e raggio $R = 0.2 \text{ m}$, sono liberi di ruotare indipendentemente attorno ad un asse orizzontale fisso passante per i loro centri. Attorno al disco A è avvolto un filo che sostiene una massa $m = 2 \text{ kg}$. Si lascia libera m e il disco A si mette in moto mentre il disco B rimane fermo. Nell'istante in cui il disco A raggiunge la velocità angolare $\omega = 15 \text{ rad/s}$ il disco B viene spinto contro A e vi rimane incollato. Calcolare: a) la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto, b) l'impulso trasmesso all'asse nell'urto.



P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

Elementi di Fisica

meccanica e termodinamica

Accedi all'ebook e ai contenuti digitali > Espandi le tue risorse > con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere alla versione **ebook** del testo e agli ulteriori servizi. L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

