

il **nuovo** concorso
a cattedra

COMPRENDE
ESTENSIONI
ONLINE

Scienze Matematiche applicate

Manuale per la preparazione alle prove scritte e orali

Classe di concorso:

A47 Scienze matematiche applicate | **A048** Matematica applicata

Emiliano Barbuto e Santo Calabrese



Accedi ai servizi riservati



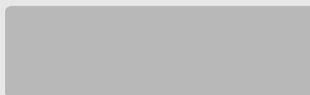
COLLEGATI AL SITO
EDISES.IT

ACCEDI AL
MATERIALE DIDATTICO

SEGUI LE
ISTRUZIONI

Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it** e accedere ai **servizi** e **contenuti riservati**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie



Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.

L'**accesso ai servizi riservati** ha la durata di **un anno** dall'attivazione del codice e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticali tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*

il **nuovo** concorso
a cattedra

Scienze Matematiche applicate

Manuale per la preparazione alle prove scritte e orali

di **Emiliano Barbuto** e **Santo Calabrese**



Il nuovo Concorso a Cattedra – Scienze matematiche applicate - I Edizione
Copyright © 2016, EdiSES S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2020 2019 2018 2017 2016

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

Autori:

Emiliano Barbuto

Santo Calabrese

Daniela Decembrino (per le Unità di Apprendimento)

Progetto grafico: ProMedia Studio di A. Leano - Napoli

Grafica di copertina e fotocomposizione:  curvilinee

Redazione: EdiSES - Napoli

Stampato presso Litografia Sograte S.r.l. – Città di Castello (PG)

Per conto della EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 978 88 6584 637 7

www.edises.it
info@edises.it

Sommario

Parte Prima Matematica

Capitolo 1 Insiemi, relazioni, funzioni.....	3
Capitolo 2 Geometria euclidea e geometrie non euclidee.....	43
Capitolo 3 Insiemi numerici.....	123
Capitolo 4 Il metodo delle coordinate.....	209
Capitolo 5 Funzioni reali e calcolo numerico.....	331
Capitolo 6 Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile.....	377
Capitolo 7 Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica.....	533
Capitolo 8 Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità.....	
Capitolo 9 Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale.....	

Parte Seconda Matematica applicata

Capitolo 1 Matematica finanziaria.....	633
Allegato A Formulario di Matematica finanziaria.....	699
Capitolo 2 Matematica attuariale.....	705
Allegato B Formulario di Matematica attuariale.....	735
Capitolo 3 Ricerca operativa.....	739
Appendice Storia della matematica.....	777

Parte Terza Esempi di Unità di Apprendimento

Premessa La consapevolezza progettuale del docente.....	805
Unità di Apprendimento 1 Espressioni logiche.....	815
Unità di Apprendimento 2 Parliamo il “geometriche”: lessico geometrico “poco familiare”.....	
Unità di Apprendimento 3 Cogito ergo sum.....	



Finalità e struttura dell'opera

Il presente volume si pone come utile strumento di studio per quanti si apprestano alla preparazione al concorso a cattedra per le classi il cui programma d'esame comprende la **Matematica applicata**, e contiene sia le principali **conoscenze teoriche** necessarie per superare tutte le fasi della selezione concorsuale che preziosi **spunti operativi** per l'ordinaria attività d'aula.

Il testo è strutturato in parti. La **prima parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali.

La **seconda parte** tratta gli argomenti fondamentali della **Matematica finanziaria e attuariale** e della **Ricerca operativa**. Un'utile **Appendice**, inserita alla fine della seconda parte, espone le principali figure della storia della matematica e della matematica applicata.

L'ultima parte del testo è infine incentrata sulla **pratica dell'attività d'aula** e contiene un esempio di **Unità di Apprendimento** utilizzabile come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa. Ulteriori Unità di Apprendimento potranno essere consultate registrandosi al nostro sito, dalla propria area riservata.

Questo lavoro, ricco, complesso, denso di rinvii normativi e spunti operativi per l'attività dei futuri insegnanti, tratta materie in continua evoluzione.

Ulteriori **materiali didattici** e **approfondimenti** sono disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nel frontespizio del volume.

Altri aggiornamenti sulle procedure concorsuali saranno disponibili sui nostri profili social

Facebook.com/ilconcorsoacattedra

Clicca su  (**Facebook**) per ricevere gli aggiornamenti

www.concorsoacattedra.it

Indice

Parte Prima Matematica

Capitolo 1 Insiemi, relazioni, funzioni

1.1	Concetti fondamentali	3
1.2	Relazione di inclusione	4
1.3	Operazioni tra insiemi	5
1.4	Insieme delle parti	8
1.5	Coppia ordinata e prodotto cartesiano.....	8
1.6	Relazione binaria.....	9
1.7	Relazioni di equivalenza	11
1.8	Relazioni d'ordine largo	12
1.9	Relazioni d'ordine stretto	13
1.10	Funzioni	13
1.11	Funzioni suriettive, iniettive e biiettive	15
1.12	Funzioni composte	17
1.13	Funzione inversa e identità.....	17
1.14	Cardinalità di un insieme	18
1.14.1	Insiemi equipotenti e numeri cardinali.....	18
1.14.2	Operazioni tra numeri cardinali	19
1.14.3	Insiemi finiti e insiemi numerabili.....	20
1.14.4	Insiemi numerici numerabili.....	22
1.14.5	Insiemi numerici non numerabili.....	25
1.14.6	L'ipotesi del continuo.....	29
1.15	Calcolo combinatorio	30
1.15.1	Principio di moltiplicazione	30
1.15.2	Fattoriale di un numero	31
1.15.3	Disposizioni con ripetizione	31
1.15.4	Disposizioni	32
1.15.5	Permutazioni	33
1.15.6	Permutazioni con ripetizione	33
1.15.7	Combinazioni	34
1.15.8	Combinazioni con ripetizione.....	35
1.15.9	Il coefficiente binomiale.....	35
1.15.10	Formula del binomio di Newton	36
1.15.11	Somma di coefficienti binomiali.....	37
1.15.12	Il triangolo di Tartaglia	37
1.16	Il metodo assiomatico	39
1.16.1	Le teorie matematiche	39



1.16.2	La definizione dei termini	39
1.16.3	Distinzione tra termine e concetto: teorie realistiche e teorie formali	40

Capitolo 2 Geometria euclidea e geometrie non euclidee

2.1	Gli <i>Elementi</i> di Euclide	43
2.1.1	La struttura degli <i>Elementi</i> di Euclide	43
2.1.2	Definizioni, assiomi e postulati nel primo libro degli <i>Elementi</i>	43
2.1.3	Il quinto postulato di Euclide.....	46
2.1.4	Il quinto postulato e la struttura del primo libro degli <i>Elementi</i>	47
2.2	Trasformazioni affini tra piani e affinità nel piano.....	51
2.2.1	Trasformazioni affini	51
2.2.2	Affinità	55
2.2.3	Proprietà delle affinità.....	56
2.2.4	Punti uniti di una trasformazione	60
2.2.5	Le similitudini e il gruppo Euclideo	63
2.2.6	Particolari similitudini: omotetie	68
2.2.7	Isometrie.....	71
2.2.8	Isometrie dirette.....	72
2.2.9	Isometrie inverse	80
2.2.10	Riepilogo.....	84
2.3	L'idea della geometria proiettiva	86
2.3.1	La prospettiva	86
2.3.2	La retta proiettiva.....	86
2.3.3	Il piano proiettivo	89
2.3.4	Coordinate omogenee nel piano proiettivo.....	93
2.3.5	Spazio proiettivo e coordinate omogenee nello spazio	95
2.3.6	Definizione operativa di spazio proiettivo.....	95
2.4	Operare con le coordinate omogenee.....	97
2.4.1	Rette nel piano	97
2.4.2	Coniche in coordinate omogenee	99
2.5	Le proiettività	101
2.5.1	Proiettività sulla retta proiettiva	101
2.5.2	Punti uniti.....	102
2.5.3	Il birapporto	105
2.5.4	Proiettività sul piano	107
2.5.5	Punti uniti e rette unite	110
2.5.6	Studio della prospettiva	116

Capitolo 3 Insiemi numerici

3.1	Leggi di composizione interne ed esterne	123
3.2	L'insieme dei numeri naturali.....	123
3.2.1	Assiomi di Peano	124
3.2.2	Addizione di naturali	125
3.2.3	Moltiplicazione di naturali	127
3.2.4	Relazione d'ordine nei naturali	128
3.2.5	La divisione euclidea.....	129
3.2.6	La potenza	131

3.3	Rappresentazione dei numeri naturali.....	131
3.3.1	I primi modi di rappresentare i numeri naturali.....	131
3.3.2	Il sistema di numerazione dell'antica Roma.....	132
3.3.3	Il sistema di numerazione decimale.....	133
3.3.4	Il sistema di numerazione binario.....	134
3.3.5	Conversioni.....	135
3.4	L'insieme dei numeri interi.....	136
3.5	I numeri razionali.....	140
3.5.1	Definizione dell'insieme dei numeri razionali.....	140
3.5.2	Operazioni nell'insieme dei numeri razionali.....	141
3.5.3	La relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali.....	142
3.5.4	Scrittura posizionale dei numeri razionali.....	143
3.6	Le problematiche che portano alla nascita dei numeri reali.....	145
3.6.1	La scrittura posizionale.....	145
3.6.2	L'estrazione di radice.....	145
3.6.3	Le grandezze incommensurabili.....	145
3.6.4	Le soluzioni di equazioni a coefficienti interi.....	147
3.6.5	La quadratura del cerchio.....	148
3.7	La costruzione dell'insieme dei numeri reali.....	148
3.7.1	Primo approccio: la notazione posizionale.....	148
3.7.2	Secondo approccio: i tagli di Dedekind.....	148
3.7.3	Terzo approccio: le successioni di numeri razionali.....	152
3.8	Numeri irrazionali, numeri algebrici e numeri trascendenti.....	152
3.8.1	I numeri irrazionali.....	152
3.8.2	Numeri che sono zeri di un polinomio: i numeri algebrici.....	153
3.8.3	Numeri che non sono zeri di un polinomio: i numeri trascendenti.....	154
3.9	Le strutture algebriche.....	155
3.9.1	Definizione di struttura algebrica.....	155
3.9.2	Proprietà associativa e semigrupperi.....	155
3.9.3	Esistenza dell'elemento neutro e monoidi.....	156
3.10	I gruppi.....	157
3.10.1	Esistenza dell'elemento inverso.....	157
3.10.2	Definizione di gruppo.....	157
3.10.3	Proprietà commutativa e gruppi abeliani.....	158
3.10.4	Gruppi finiti, infiniti e finitamente generati, insiemi di generatori.....	159
3.11	Aritmetica modulare.....	160
3.11.1	Congruenza modulo n	160
3.11.2	Teoremi dell'aritmetica modulare.....	160
3.11.3	Classi di congruenza modulo n e insieme quoziente.....	161
3.11.4	Gruppi definiti mediante la relazione di congruenza.....	162
3.12	Gruppi ciclici.....	164
3.12.1	Caratteristiche di un gruppo ciclico e periodo degli elementi.....	164
3.12.2	Gruppi additivi.....	165
3.12.3	Gruppi moltiplicativi.....	165
3.13	Tavole di Cayley.....	167
3.14	Prodotto di gruppi.....	168
3.15	I sottogruppi e i laterali destro e sinistro.....	169

3.15.1	Definizione di sottogruppo	169
3.15.2	Classi laterali.....	169
3.15.3	Sottogruppi normali	171
3.16	Gruppi risolubili.....	175
3.17	I gruppi simmetrici	176
3.17.1	Permutazioni	176
3.17.2	Il gruppo simmetrico delle permutazioni	177
3.17.3	Cicli e trasposizioni	178
3.17.4	Le permutazioni pari e il gruppo alterno.....	182
3.17.5	Risolubilità dei gruppi simmetrici S_2 , S_3 e S_4	183
3.17.6	Il gruppo simmetrico S_5	185
3.18	Gruppo diedrale.....	186
3.18.1	Definizione	186
3.18.2	Interpretazione geometrica.....	187
3.19	Isomorfismo tra gruppi e gruppi isomorfi.....	192
3.20	Anelli.....	196
3.20.1	Definizione	196
3.20.2	Anello dei polinomi	197
3.21	Corpi e campi.....	199
3.21.1	Definizioni	199
3.21.2	Estensione di un campo.....	200
3.21.3	Campo di spezzamento (o campo di riducibilità completa).....	202
3.22	Teoria di Galois	204
3.22.1	L'idea	204
3.22.2	Gruppo di Galois.....	205
3.22.3	Risolubilità per radicali di un'equazione di grado n	207

Capitolo 4 Il metodo delle coordinate

4.1	Gli spazi vettoriali.....	209
4.1.1	Definizione di spazio vettoriale	209
4.1.2	Sottospazio.....	212
4.1.3	Combinazione lineare di vettori	213
4.1.4	Dipendenza e indipendenza lineare.....	214
4.1.5	Generatori e basi	215
4.1.6	Dimensione di uno spazio vettoriale.....	217
4.2	Applicazioni lineari	218
4.2.1	Definizione di applicazione lineare	218
4.2.2	Composizione di applicazioni lineari	219
4.2.3	Un esempio di spazio vettoriale: lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari.....	219
4.2.4	Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.....	220
4.2.5	Particolari applicazioni lineari	221
4.3	Matrici.....	222
4.3.1	Definizioni	222
4.3.2	Lo spazio vettoriale delle matrici	223
4.3.3	Moltiplicazione tra matrici	226
4.3.4	Corrispondenza tra matrici ed applicazioni lineari	231

4.3.5	Isomorfismo tra matrici e applicazioni lineari	235
4.3.6	Matrici associate ad endorfismi, matrici simili	235
4.3.7	Composizione di applicazioni lineari e matrici.....	236
4.4	Determinanti	236
4.4.1	Definizione e calcolo del determinante di una matrice	236
4.4.2	Proprietà del determinante di una matrice.....	242
4.4.3	Rango di una matrice.....	245
4.5	Sistemi lineari.....	249
4.5.1	Definizione di sistema lineare	249
4.5.2	Sistemi lineari compatibili	250
4.5.3	Soluzioni di sistemi lineari quadrati	251
4.5.4	Soluzioni di sistemi lineari generici	252
4.5.5	Procedura per la risoluzione di un generico sistema	253
4.5.6	Matrice inversa	259
4.5.7	Sistemi lineari omogenei.....	262
4.6	Diagonalizzazione di matrici	265
4.6.1	Autovettore, autovalore e autospazio.....	265
4.6.2	Matrici diagonalizzabili.....	266
4.6.3	Algoritmo per diagonalizzare le matrici.....	267
4.6.4	Polinomi e condizioni di diagonalizzazione.....	269
4.6.5	Segnatura di una matrice	269
4.7	Punti, rette e vettori nello spazio euclideo	275
4.8	Geometria analitica nel piano	277
4.8.1	Punti nel piano cartesiano.....	277
4.8.2	Vettori nel piano cartesiano	278
4.8.3	Le curve algebriche.....	281
4.9	Curve algebriche di primo grado: le rette	282
4.9.1	Equazione di una retta in forma parametrica.....	282
4.9.2	Equazione di una retta in forma implicita	283
4.9.3	Intersezione di due rette	283
4.9.4	Rette: casi particolari	286
4.9.5	Equazione della retta in forma segmentaria	287
4.9.6	Equazione della retta in forma esplicita	288
4.9.7	Fasci di rette	289
4.9.8	Alcune relazioni utili sulla retta	291
4.10	Curve algebriche di secondo grado: le coniche	293
4.10.1	Classificazione di una conica.....	293
4.10.2	Riduzione a forma normale di una conica.....	296
4.10.3	Le coniche come sezioni di un cono a due falde.....	302
4.11	Geometria analitica nello spazio	304
4.11.1	Punti nello spazio.....	304
4.11.2	Vettori nello spazio	305
4.12	Superfici algebriche di primo grado: i piani	309
4.12.1	Equazione parametrica del piano	309
4.12.2	Equazione generale del piano.....	309
4.12.3	Equazioni di piani particolari.....	313
4.12.4	Intersezione di due piani e condizione di parallelismo	314

4.13	Le rette nello spazio.....	315
4.13.1	Equazioni parametriche della retta	315
4.13.2	Equazioni normali della retta.....	316
4.13.3	Equazioni generali ed equazioni ridotte della retta	316
4.13.4	Intersezione tra retta e piano (rette e piani paralleli)	320
4.13.5	Rette parallele e perpendicolari.....	321
4.13.6	Piani paralleli e perpendicolari.....	323
4.13.7	Rette e piani perpendicolari.....	323
4.13.8	Distanza di un punto da un piano	324
4.14	Superfici algebriche di secondo ordine: le quadriche.....	324
4.14.1	Classificazione di una quadrica	324

Capitolo 5 Funzioni reali e calcolo numerico

5.1	Intervalli e intorni	331
5.1.1	Tipologie di intervalli	331
5.1.2	Intorni e intorni circolari	333
5.2	Funzioni reali di variabili reali	333
5.2.1	Generalità	333
5.2.2	Campo di esistenza ed immagine.....	335
5.2.3	Funzioni composte.....	336
5.2.4	Funzioni invertibili.....	336
5.2.5	Funzioni monotone	337
5.2.6	Funzioni pari e dispari.....	340
5.2.7	Funzioni periodiche.....	341
5.2.8	Funzioni elementari.....	342
5.2.9	Determinazione del campo di esistenza delle funzioni reali	349
5.3	Errori nel calcolo numerico	351
5.3.1	Premessa	351
5.3.2	Rappresentazione esponenziale dei numeri reali.....	351
5.3.3	I numeri in virgola mobile.....	353
5.3.4	Perdita di informazione nel calcolo con numeri <i>floating point</i>	355
5.3.5	Arrotondare e troncatura.....	357
5.3.6	Errore assoluto ed errore relativo	359
5.3.7	Errore assoluto limite ed errore relativo limite.....	361
5.3.8	Cifre decimali corrette e cifre significative corrette	365
5.4	Propagazione dell'errore.....	366
5.4.1	Alcune regole basilari di propagazione dell'errore	366
5.4.2	Problema, algoritmo ed elaboratore.....	368
5.4.3	Condizionamento di un problema	369
5.4.4	Stabilità di un algoritmo	373

Capitolo 6 Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile

6.1	Limite di una funzione	377
6.1.1	Punti di accumulazione	377
6.1.2	Definizione di limite	378
6.1.3	Limiti per funzioni divergenti in un punto.....	379

6.1.4	Verifica del limite.....	381
6.1.5	Limite destro e limite sinistro.....	384
6.1.6	Teoremi sui limiti.....	386
6.1.7	Operazioni sui limiti.....	388
6.1.8	Generalizzare le operazioni sui limiti.....	389
6.1.9	Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli.....	391
6.1.10	Calcolo di limiti.....	394
6.2	Successioni e limiti di successioni.....	398
6.2.1	Definizione e generalità.....	398
6.2.2	Limite di una successione di numeri reali.....	401
6.3	Continuità delle funzioni reali.....	402
6.3.1	Funzione continua.....	402
6.3.2	Funzione uniformemente continua.....	407
6.3.3	Punti di discontinuità.....	408
6.3.4	Individuare i punti di discontinuità di una funzione.....	410
6.4	Derivata.....	411
6.4.1	Rapporto incrementale.....	411
6.4.2	Definizioni di derivata e di derivabilità.....	412
6.4.3	Derivata destra e sinistra.....	413
6.4.4	Continuità e derivabilità.....	413
6.4.5	Dal rapporto incrementale alla derivata.....	414
6.4.6	Interpretazione geometrica della derivata.....	416
6.4.7	Retta tangente ad una funzione in un punto.....	418
6.4.8	Regole di derivazione.....	419
6.4.9	Calcolo di derivate.....	419
6.4.10	Punti di discontinuità della derivata.....	422
6.4.11	Derivate di ordine superiore.....	425
6.4.12	Differenziale.....	426
6.5	Calcolo differenziale e studio di una funzione di variabile reale.....	427
6.5.1	Teorema di Rolle, Cauchy e Lagrange.....	427
6.5.2	Condizioni sulla monotonia di una funzione.....	431
6.5.3	Massimi e minimi assoluti di una funzione.....	432
6.5.4	Estremo inferiore ed estremo superiore.....	432
6.5.5	Massimo e minimo relativo.....	434
6.5.6	Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo e assoluto.....	435
6.5.7	Condizioni su concavità e punti di flesso.....	439
6.5.8	I teoremi di l'Hopital.....	441
6.5.9	Asintoti di una funzione.....	444
6.5.10	Studio del grafico di una funzione.....	446
6.6	Il problema della misura.....	454
6.6.1	Introduzione.....	454
6.6.2	La misura di Peano-Jordan.....	454
6.6.3	La misura di Vitali-Lebesgue.....	460
6.7	Integrazione indefinita.....	462
6.7.1	Definizioni.....	462
6.7.2	Regole di integrazione.....	464
6.7.3	Metodi risolutivi per integrali di frazioni algebriche.....	470

6.8	Integrazione definita.....	475
6.8.1	Somma inferiore e somma superiore	475
6.8.2	Dalle somme all'integrale di Riemann	477
6.8.3	Le somme di Cauchy-Riemann	478
6.8.4	Funzioni integrabili.....	480
6.8.5	Proprietà degli integrali definiti	481
6.8.6	Teoremi sull'integrazione definita	482
6.9	Integrali impropri	487
6.9.1	Caso di un intervallo semi-aperto.....	487
6.9.2	Caso di un intervallo aperto	488
6.9.3	Caso generale: funzione generalmente continua su un intervallo limitato o illimitato	489
6.10	Calcolo di volumi di solidi di rotazione	490
6.11	Lunghezza di una curva ed area della superficie di rotazione	492
6.12	Serie numeriche	495
6.12.1	Definizioni	495
6.12.2	Serie a termini positivi, a termini di segno alterno e a termini qualunque.....	497
6.12.3	La serie geometrica.....	498
6.12.4	Resto di una serie	499
6.12.5	Teoremi generali sul carattere delle serie	501
6.13	Criteri di convergenza delle serie a termini positivi	502
6.13.1	Premessa	502
6.13.2	Criterio del confronto con l'integrale (Cauchy)	502
6.13.3	La serie di Dirichlet e la serie armonica.....	503
6.13.4	Criterio del confronto (o di Gauss)	504
6.13.5	Secondo criterio del confronto.....	505
6.13.6	Criterio del rapporto (o di D'Alembert)	506
6.13.7	Criterio della radice (o di Cauchy)	507
6.14	Criteri di convergenza delle serie a termini alterni e qualunque	508
6.14.1	Criterio di Leibnitz.....	508
6.14.2	La convergenza assoluta	509
6.14.3	Criteri di Cauchy e D'Alembert per serie a termini a segni alterni o qualunque	510
6.15	Sviluppo in serie di funzioni.....	511
6.15.1	Le serie di funzioni	511
6.15.2	Le serie di potenze.....	513
6.15.3	La serie di Mac Laurin	515
6.15.4	Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.....	517
6.15.5	La formula di Eulero.....	520
6.15.6	La serie di Taylor.....	521
6.15.7	Applicazioni della serie di Taylor.....	522
6.15.8	La serie di Fourier.....	528

Capitolo 7 Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica

7.1	Definire la probabilità.....	533
7.1.1	Esperimento, insieme universo ed eventi.....	533

7.1.2	Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi	534
7.1.3	Definizione classica della probabilità.....	535
7.1.4	Definizione frequentista (o statistica) della probabilità.....	540
7.1.5	Definizione soggettiva di probabilità (o probabilità su scommessa)	545
7.1.6	Definizione assiomatica di probabilità.....	548
7.2	Teoremi fondamentali della teoria della probabilità	550
7.2.1	Probabilità dell'evento somma e probabilità dell'evento prodotto	550
7.2.2	Probabilità condizionata e probabilità composta	551
7.2.3	Indipendenza stocastica.....	554
7.2.4	Formula della probabilità totale.....	556
7.2.5	Teorema di Bayes	558
7.3	Fasi e strumenti dell'indagine statistica	561
7.3.1	Popolazioni, caratteri e modalità	561
7.3.2	Caratteri quantitativi e qualitativi.....	562
7.3.3	Intensità, frequenze assolute e relative	565
7.3.4	Tabelle e distribuzioni	568
7.3.5	Grafici	569
7.3.6	Grafici per caratteri qualitativi	570
7.3.7	Grafici per caratteri quantitativi discreti.....	574
7.3.8	Grafici per caratteri quantitativi continui.....	576
7.3.9	Le fasi di una indagine statistica	579
7.3.10	Analisi statistica univariata.....	581
7.4	Indici di posizione.....	582
7.4.1	La media aritmetica	583
7.4.2	La media geometrica	586
7.4.3	La media armonica	588
7.4.4	La media quadratica	590
7.4.5	Relazione tra le medie algebriche.....	591
7.4.6	La moda	591
7.4.7	La mediana	593
7.4.8	I quantili	597
7.5	Indici di variabilità	598
7.5.1	Campo di variabilità e differenze interquantili	599
7.5.2	Scarto semplice medio.....	599
7.5.3	Devianza.....	601
7.5.4	Varianza e scarto quadratico medio.....	601
7.5.5	Indici di dispersione relativi.....	604
7.5.6	Le differenze medie	605
7.5.7	La concentrazione.....	608
7.6	Indici di forma.....	615
7.6.1	Asimmetria.....	615
7.6.2	Curtosi.....	616
7.7	Rapporti statistici.....	618
7.7.1	Tipologie di rapporti statistici	618
7.7.2	I numeri indici	624
7.7.3	I numeri indici complessi	629

Capitolo 8 Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità



Capitolo 9 Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale



Parte seconda

Matematica applicata

Capitolo 1 Matematica finanziaria

1.1	Operazioni finanziarie	633
1.1.1	Criteri di preferenza assoluta	635
1.2	Legge di capitalizzazione semplice o lineare	635
1.2.1	Ricerca del tasso	638
1.2.2	Ricerca del tempo	640
1.2.3	Ricerca del capitale iniziale	642
1.3	Legge di capitalizzazione composta o esponenziale	643
1.3.1	Ricerca del tasso	645
1.3.2	Ricerca del tempo	646
1.3.3	Ricerca del capitale iniziale	647
1.4	Scindibilità.....	648
1.5	Confronto grafico fra capitalizzazione semplice e composta.....	649
1.6	Tassi equivalenti.....	650
1.6.1	Tassi equivalenti in capitalizzazione semplice	650
1.6.2	Tassi equivalenti in capitalizzazione composta.....	651
1.6.3	Tasso annuo nominale convertibile k volte	653
1.6.4	Studio di J_k al variare del frazionamento k.....	656
1.7	Leggi di attualizzazione o di sconto	657
1.7.1	Sconto commerciale	658
1.7.2	Legge di attualizzazione semplice o sconto razionale	660
1.7.3	Legge di attualizzazione composta	661
1.7.4	Legge di capitalizzazione coniugata allo sconto commerciale.....	662
1.7.5	Tassi equivalenti in regimi diversi: relazioni tra d e i.....	664
1.8	Leggi coniugate	665
1.9	Principio di equivalenza finanziaria.....	665
1.10	Rendite certe	669
1.10.1	Montante di una rendita.....	670
1.10.2	Valore attuale di una rendita.....	675
1.11	Estinzione o rimborso di un prestito	681
1.11.1	Ammortamento italiano o uniforme o a quote di capitale costanti	685
1.11.2	Ammortamento francese o progressivo o a rata costante.....	687
1.11.3	Ammortamento americano o a due tassi o a quote di accumulazione	691
1.11.4	Estinzione di un prestito diviso in titoli.....	694
1.12	Leasing.....	696
1.13	Scelta tra investimenti	697
1.13.1	REA o VAN.....	697
1.13.2	Tasso implicito o TIR	697
1.13.3	Tempo di recupero del capitale	698

Allegato A - Formulario di Matematica finanziaria	699
---	-----

Capitolo 2 Matematica attuariale

2.1 Operazioni finanziarie aleatorie: le assicurazioni	705
2.2 Probabilità di vita e di morte	707
2.3 Assicurazione elementare di vita o fattore attuariale di sconto	711
2.4 Assicurazioni di rendita vitalizia	714
2.4.1 Rendita vitalizia immediata illimitata o a "vita intera"	714
2.4.2 Rendita vitalizia differita illimitata o pensione	716
2.4.3 Rendita vitalizia immediata temporanea	717
2.4.4 Rendita vitalizia differita e temporanea.....	719
2.5 Assicurazione elementare di morte.....	720
2.5.1 Assicurazione in caso di morte a vita intera	721
2.5.2 Assicurazione in caso di morte immediata e temporanea.....	722
2.5.3 Assicurazione in caso di morte differita e temporanea	724
2.5.4 Assicurazione in caso di morte differita.....	725
2.5.5 Pagamento all'atto del decesso	726
2.6 Assicurazioni miste	727
2.6.1 Assicurazione mista semplice	728
2.6.2 Assicurazione mista doppia	729
2.6.3 Assicurazione mista a capitale raddoppiato	729
2.7 Premi periodici puri.....	730
2.8 Premi di tariffa	731
2.9 Riserva matematica	732
2.10 Rischio aggravato	734

Allegato B - Formulario di Matematica attuariale.....	735
---	-----

Capitolo 3 Ricerca operativa

3.1 Definizione	740
3.2 Fasi di un problema di ricerca operativa	741
3.2.1 Definizione del problema e raccolta dei dati	741
3.2.2 Costruzione del modello	741
3.2.3 Ricerca della soluzione ottima e verifica	742
3.3 Modello matematico del problema.....	742
3.3.1 Richiami di disequazioni lineari in due variabili	744
3.3.2 Richiami sui sistemi di disequazioni lineari in due variabili	746
3.4 Le decisioni.....	751
3.4.1 In condizione di certezza.....	752
3.4.2 In condizione di incertezza	752
3.4.3 Decisioni in condizioni di certezza con effetti immediati.....	752
3.4.4 Decisioni in condizioni di certezza con effetti differiti.....	759
3.4.5 Decisioni in condizioni di incertezza.....	765
3.5 La programmazione lineare	769

Appendice - Storia della matematica	777
---	-----

Parte Terza

Esempi di Unità di Apprendimento

Premessa La consapevolezza progettuale del docente	805
Unità di Apprendimento 1 Espressioni logiche	815
Unità di Apprendimento 2 Parliamo il “geometriche” “poco” familiare!.....	
Unità di Apprendimento 3 Cogito ergo sum	

Capitolo 7

Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica

7.1 Definire la probabilità

7.1.1 Esperimento, insieme universo ed eventi

Si consideri un qualsiasi **esperimento** mediante il quale si realizzano un insieme di **condizioni** di partenza indicate con y . Questo esperimento può essere ripetuto più volte, ricreando ciascuna volta le medesime condizioni y . In pratica, si suppone che esso sia un esperimento perfettamente ripetibile. Ogni ripetizione dell'esperimento viene detta **prova** o **tentativo**. L'esperimento può avere un certo numero di esiti possibili, detti anche **risultati** dell'esperimento. Questi risultati sono ben distinti tra loro. Pertanto, ad ogni prova si può ottenere un risultato. L'insieme dei risultati possibili, indicato con U , è anche detto **spazio campionario** (o **insieme universo**) associato al determinato esperimento. Si suppone che l'insieme U sia finito o numerabile, ossia che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con un insieme finito del tipo $\{1, 2, \dots, n\}$ con $n \in \mathbb{N}$, oppure che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei naturali \mathbb{N} . Qualsiasi sottoinsieme E di U è detto **evento**. Si noti che, in particolare, un evento E può contenere anche più risultati dell'esperimento (vedi Figura 1).

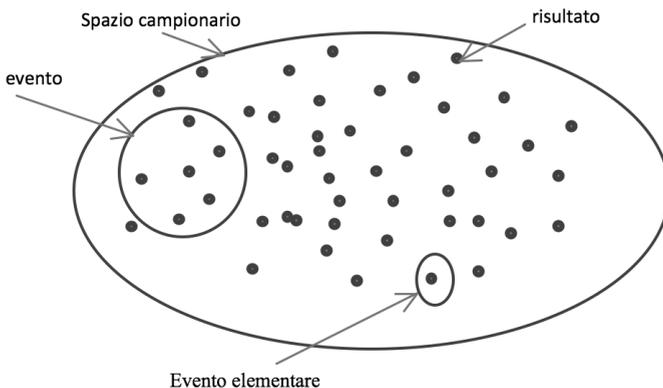


Figura 1

Vi sono particolari tipi di eventi. Un evento **elementare** è tale da riferirsi ad un singolo risultato dell'esperimento, pertanto l'evento elementare è un sottoinsieme di U che contiene un singolo elemento (vedi Figura 1). L'evento **certo** è il sottoinsieme di U che coincide con lo stesso insieme U . In pratica, l'evento certo racchiude tutti i possibili risultati dell'esperimento e, pertanto, deve necessariamente verificarsi. L'evento **impossibile** è rappresentato dall'insieme vuoto \emptyset che è anch'esso un sottoinsieme di U . È impossibile che tale evento si verifichi, quando si svolge una prova dell'esperimento.

In una prova dell'esperimento in questione, si dice che si è **verificato l'evento E** se il risultato dell'esperimento è un elemento del sottoinsieme E di U . Viceversa, si dice che **non si è verificato l'evento E** . Un risultato dell'esperimento che permette ad E di verificarsi viene anche detto **risultato favorevole all'evento E** . Viceversa si parla di **risultato sfavorevole all'evento E** .

Nell'introdurre il concetto di evento, si è supposto che l'insieme U fosse finito o numerabile, asserendo che qualsiasi sottoinsieme di U è un evento. Viceversa, se l'insieme U è continuo, allora non tutti i suoi sottoinsiemi sono degli eventi, in tal caso solo i sottoinsiemi misurabili di U (secondo una misura introdotta nell'insieme) sono definiti come eventi.

7.1.2 Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi

Gli eventi sono stati definiti come dei sottoinsiemi E di un insieme U , pertanto tra essi possono valere le usuali relazioni che sussistono tra insiemi (vedi cap. 1). Considerati due eventi E_1 ed E_2 di un insieme universo U , da essi è possibile definire l'evento somma, l'evento prodotto e l'evento differenza.

L'**evento somma** è dato dall'unione insiemistica dei due eventi:

$$E = E_1 \cup E_2$$

Questo evento si verifica se si verifica l'evento E_1 oppure l'evento E_2 o entrambi (si rammenti che i due eventi possono contenere anche uno o più risultati in comune).

L'**evento prodotto** è dato dall'intersezione insiemistica dei due eventi:

$$E = E_1 \cap E_2$$

L'evento prodotto E si verifica se si verificano entrambi gli eventi E_1 ed E_2 .

L'**evento differenza** dei due eventi è dato dal complemento di E_2 rispetto ad E_1 .

$$E = E_1 - E_2$$

L'evento differenza E si verifica se è verificato E_1 , ma non è verificato E_2 .

Considerato un evento E , si può definire il suo **evento opposto**, indicato con \bar{E} . Esso è pari al complemento di E rispetto ad U .

$$\bar{E} = U - E$$

Si noti che $\bar{\bar{E}} \cup E = U$, mentre $\bar{\bar{E}} \cap E = \emptyset$.

Sussistono inoltre le seguenti relazioni tra eventi.

Si dice che l'evento E_1 **implica** l'evento E_2 se E_1 è contenuto in E_2 :

$$E_1 \subseteq E_2$$

Questa relazione indica che se si verifica l'evento E_1 , allora l'evento E_2 deve necessariamente verificarsi.

Due eventi E_1 ed E_2 si dicono **incompatibili** (o **mutuamente incompatibili**) se la loro intersezione è nulla.

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

In tal caso il verificarsi di uno dei due eventi esclude necessariamente il verificarsi dell'altro.

Un insieme di n eventi E_1, E_2, \dots, E_n viene detto **sistema completo di eventi** se l'unione degli eventi è pari all'insieme universo U .

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = U$$

Se gli eventi E_1, E_2, \dots, E_n sono tutti mutuamente incompatibili, ossia $E_k \cap E_j = \emptyset, \forall E_k, E_j$, allora E_1, E_2, \dots, E_n viene detto **sistema completo di eventi incompatibili**.

Dopo aver definito gli eventi come sottoinsiemi dell'insieme U ed aver identificato particolari tipi di eventi e particolari relazioni che possono sussistere tra gli eventi, viene spontaneo chiedersi come si possa quantificare la possibilità che uno o più di questi eventi si verifichino nell'effettuare una prova dell'esperimento. Si vuole pertanto attribuire a ciascun evento un numero che sia indice della possibilità che esso si verifichi. Tale numero viene detto **probabilità**. Va detto subito che il percorso verso la definizione della probabilità in modo coerente e completo ha coinvolto diversi studiosi, ciascuno dei quali ha fornito una propria definizione di probabilità. Il passo conclusivo è stato l'introduzione di una teoria assiomatica della probabilità che ha raccolto come casi particolari le definizioni precedenti. Questo percorso viene affrontato nei paragrafi successivi.

7.1.3 Definizione classica della probabilità

Si suppone di effettuare un esperimento che presenti una **simmetria** nei risultati (negli esiti). Per via di tale simmetria, nessuno degli esiti è quantitativamente differente dagli altri. Questa simmetria influenza anche l'insieme universo U che risulta formato da eventi elementari che hanno tutti la stessa possibilità di verificarsi. Tali eventi vengono detti **equiprobabili**. Da tale denominazione si comprende che la probabilità di tutti questi eventi elementari deve avere il medesimo valore numerico. Quando si effettua una prova dell'esperimento, essa può dare un esito corrispondente all'evento elementare E_i . In tal caso si dice che la prova è **favorevole all'evento elementare E_i** oppure **verifica l'evento elementare E_i** . Tutti gli eventi elementari, oltre ad essere equiprobabili, sono anche **incompatibili**. Questo significa che se una prova è favorevole ad un evento elementare E_i , ciò esclude automaticamente che



tale prova sia favorevole o possa verificare qualsiasi altro evento elementare dell'insieme universo U . Ovviamente, anche in questo caso si possono definire eventi che sono unioni di eventi elementari e si può parlare di prove favorevoli ad eventi qualsiasi.

In queste ipotesi si formula la seguente **definizione classica di probabilità**.

“La probabilità di un evento aleatorio previsto in una determinata prova di un esperimento è il rapporto tra il numero di risultati favorevoli al verificarsi dell'evento ed il numero di tutti i risultati possibili, essendo questi ultimi equiprobabili e mutuamente incompatibili.”

Questa definizione è stata inizialmente formulata da P.S. Laplace e rivista in seguito da C.F. Pierce.

Si noti che tale definizione di probabilità esula da qualsiasi verifica sperimentale. Questo comporta che la probabilità secondo la definizione classica può essere calcolata mediante schemi teorici e conosciuta prima di effettuare le prove dell'esperimento. Per tale motivo essa è anche detta **probabilità a priori** (è nota prima dell'esperimento).

Stando alla definizione appena fornita, la probabilità $P(E)$ di un evento E può essere scritta come:

$$P(E) = \frac{n_f}{n_p}$$

Equazione 1

dove n_f è il numero dei risultati favorevoli (al verificarsi di E) e n_p è il numero dei risultati possibili.

Da tale definizione si deducono le seguenti proprietà:

$$P(E) \geq 0$$

Difatti la probabilità è il rapporto di due numeri naturali.

La **probabilità dell'evento certo**, ossia U , vale:

$$P(U) = \frac{n_p}{n_p} = 1$$

Considerati due eventi incompatibili E_1 ed E_2 , deve necessariamente accadere che gli n_{f1} risultati favorevoli al verificarsi di E_1 non possano coincidere con gli n_{f2} risultati favorevoli al verificarsi di E_2 .

Pertanto le probabilità dei due eventi valgono:

$$P(E_1) = \frac{n_{f1}}{n_p}; P(E_2) = \frac{n_{f2}}{n_p}$$

Inoltre la probabilità dell'evento somma è data da:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n_{f1} + n_{f2}}{n_p} = \frac{n_{f1}}{n_p} + \frac{n_{f2}}{n_p} = P(E_1) + P(E_2)$$

Quindi vale la seguente **proprietà additiva della probabilità**:

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Equazione 2

Si noti che un evento e il suo opposto sono incompatibili, ossia $\bar{E} \cap E = \emptyset$, ed inoltre la loro unione corrisponde ad U . Applicando la proprietà additiva (Equazione 2) a questi due eventi si può scrivere:

$$P(\bar{E}) + P(E) = P(\bar{E} \cup E) = P(U) = 1$$

da cui si ottiene la **probabilità dell'evento opposto**:

$$P(\bar{E}) = 1 - P(E)$$

Equazione 3

Si noti inoltre che $U \cup \emptyset = U$, pertanto il vuoto e l'insieme universo sono incompatibili. Quindi si ha:

$$P(U) + P(\emptyset) = P(U \cup \emptyset) = P(U) = 1$$

da cui

$$1 + P(\emptyset) = 1$$

Si ricava che la **probabilità dell'evento impossibile** è:

$$P(\emptyset) = 0$$

Si considerino due eventi E_1 ed E_2 tali che $E_1 \subseteq E_2$ (E_1 implica E_2). Sussiste la relazione insiemistica (vedi Figura 2):

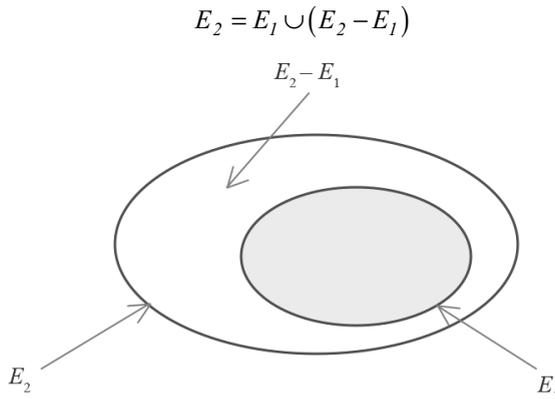


Figura 2

Inoltre i due eventi E_1 ed $E_2 - E_1$ sono incompatibili. Quindi si può scrivere:

$$P(E_2) = P(E_1 \cup (E_2 - E_1)) = P(E_1) + P(E_2 - E_1) \geq P(E_1)$$

Pertanto sussiste la seguente **proprietà di monotonia**:

$$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow P(E_1) \leq P(E_2)$$

Se un evento E_1 è incluso in un secondo evento E_2 , allora la probabilità di E_1 è maggiorata da quella di E_2 .

Un qualsiasi evento E include l'insieme vuoto \emptyset ed è a sua volta incluso nell'insieme universo U . Quindi si può scrivere dall'equazione:

$$\emptyset \subseteq E \subseteq U \Rightarrow 0 \leq P(E) \leq 1$$

La probabilità di un evento qualsiasi è un numero razionale compreso fra 0 e 1.

Considerato un sistema completo di n eventi **incompatibili** E_1, E_2, \dots, E_n con $E_k \cap E_j = \emptyset, \forall E_k, E_j$ si ha che:

$$E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n = U$$

Pertanto, applicando l'Equazione 2 si può scrivere:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = P(U)$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 1$$

$$P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n) = 1$$

$$\sum_{i=1}^n P(E_i) = 1$$

Equazione 4

Esempi

1) Nel lancio di un dado, lo spazio campionario è costituito da sei eventi: $E_1 =$ "il dado mostra la faccia 1", $E_2 =$ "il dado mostra la faccia 2", ..., $E_6 =$ "il dado mostra la faccia 6". Si calcola la probabilità che si verifichi l'evento E_6 lanciando un dado. I risultati possibili sono 6 (le 6 facce del dado) quindi $n_p = 6$, mentre i risultati favorevoli sono 1 (il numero 6), quindi $n_f = 1$. Per cui, applicando l'Equazione 1, si ha:

$$P(E_6) = \frac{n_f}{n_p} = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

In quanto numero puro, la probabilità viene spesso espressa in percentuale. Quindi si ha $P(E_6) \approx 17\%$.

La probabilità che non esca sei (l'evento opposto) è determinata mediante l'Equazione 3:

$$P(\overline{E_6}) = 1 - P(E_6) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} \approx 0,83 = 83\%$$

Infine si noti che la somma delle probabilità di tutti gli eventi possibili (tra loro mutuamente incompatibili) è pari ad 1 (Equazione 4):

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

2) In riferimento al gioco del Lotto, si vuole determinare la probabilità di indovinare l'estrazione di uno dei cinque numeri estratti (la cinquina) su una ruota. Si suppone di puntare sul numero m . Occorre chiedersi, di tutte le possibili cinquine, quante contengano m . Il numero m è fissato, mentre per gli altri 89 numeri bisogna considerare tutte le loro combinazioni a 4 a 4 da affiancare ad m per ottenere la cinquina. 89 elementi a gruppi di 4 possono essere combinati secondo il coefficiente:

$$C_{89,4} = \frac{89!}{(89-4)!4!} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 89 \cdot 22 \cdot 29 \cdot 43 = 2441626$$

Questo coefficiente rappresenta tutte le combinazioni favorevoli all'estrazione di m (cinquine vincenti). La probabilità di indovinare l'estratto è data dal numero di combinazioni (cinquine) vincenti $C_{89,4}$ diviso per il numero di cinquine possibili, ossia di tutte le combinazioni dei 90 numeri presi a gruppi di 5 $C_{90,5}$.

$$P_1 = \frac{C_{89,4}}{C_{90,5}} = \frac{\frac{89!}{85! \cdot 4!}}{\frac{90!}{85! \cdot 5!}} = \frac{89!}{85! \cdot 4!} \cdot \frac{85! \cdot 5!}{90!} = \frac{89!}{4!} \cdot \frac{5 \cdot 4!}{90 \cdot 89!} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18} \approx 0,0556$$

La probabilità di indovinare l'estratto è all'incirca il 5,6%.

3) Per determinare la probabilità di indovinare un ambo, ossia una coppia di numeri della cinquina, si suppone di puntare su di una coppia di numeri k e h . Gli altri 88 numeri devono essere affiancati ai due numeri k e h in gruppi di 3 per ottenere una cinquina. 88 elementi a gruppi di 3 possono essere combinati secondo il coefficiente:

$$C_{88,3} = \frac{88!}{(88-3)!3!} = \frac{88 \cdot 87 \cdot 86}{3 \cdot 2} = 88 \cdot 29 \cdot 43 = 109736$$

Questo coefficiente rappresenta tutte le combinazioni favorevoli all'estrazione dei due numeri dell'ambo; per cui la probabilità di indovinare l'ambo è data dal numero di combinazioni (cinquine) vincenti $C_{88,3}$ diviso per il numero di cinquine possibili $C_{90,5}$.

$$P_2 = \frac{C_{88,3}}{C_{90,5}} = \frac{2}{801} \approx 0,002497$$

Pertanto la probabilità di indovinare l'ambo è all'incirca lo 0,25%.



La definizione classica di probabilità lascia aperti alcuni problemi. Un primo evidente problema nasce fin dal momento in cui si pone la definizione stessa. Quando si espone il concetto di simmetria dei risultati sperimentali, si introduce uno spazio campionario che ha eventi “equiprobabili”, senza avere ancora parlato della “probabilità”. In pratica, la definizione di probabilità viene data attraverso il concetto di eventi che hanno la stessa probabilità di verificarsi. Con tale ragionamento si innesca un “circolo vizioso” che mina alla radice la definizione di probabilità. Oltre questo problema formale, vi è anche una evidente limitatezza della definizione, dovuta alla possibilità di analizzare solo esperimenti in cui tutti i risultati hanno la stessa probabilità. Ad esempio, verrebbe da chiedersi come trattare un dado truccato nel quale tutte le facce non hanno la stessa probabilità di uscire. Inoltre, il numero di risultati dell’esperimento, e quindi degli eventi possibili, è sempre considerato finito. Nella trattazione di esperimenti con un numero infinito di risultati per mezzo della probabilità classica emergono alcune difficoltà.

Pertanto, la definizione classica di probabilità risulta incompleta; nasce, quindi, la necessità di una nuova definizione di probabilità che possa contemplare anche i casi non trattati dalla definizione classica.

7.1.4 Definizione frequentista (o statistica) della probabilità

Le critiche mosse alla definizione classica di probabilità e lo sviluppo delle scienze sperimentali hanno portato ad una nuova definizione di probabilità di un evento, legata al concetto di frequenza dell’evento stesso. Si supponga di ripetere più volte un esperimento, sempre con il medesimo insieme di condizioni perfettamente riproducibili, e di annotare quante volte il risultato dell’esperimento sia favorevole al verificarsi di un certo evento E . Sia n_v questo numero di risultati favorevoli e sia n_r il numero di volte che l’esperimento è stato ripetuto con le medesime condizioni. La **frequenza relativa** dell’evento E viene indicata mediante il rapporto:

$$F(E) = \frac{n_v}{n_r}$$

Equazione 5

Al crescere del numero n_r di prove effettuate, si nota sperimentalmente che questo numero subisce variazioni casuali. Tuttavia, queste variazioni mostrano una certa regolarità e si concentrano intorno ad un determinato valore. L’ampiezza delle variazioni casuali diminuisce al crescere del numero di prove effettuate.

Da tali osservazioni, viene formulata la seguente **legge empirica del caso**:

“Se si effettua un gran numero di prove di un esperimento, tutte nelle medesime condizioni riproducibili, la frequenza relativa di un evento aleatorio, per il quale la probabilità resta costante al crescere del numero delle prove, tende

ordinariamente a differire in modo sempre minore dalla probabilità dell'evento. Tale differenza diminuisce in modulo al crescere delle prove effettuate". Questo asserto viene anche riassunto nella seguente relazione simbolica:

$$\lim_{n_r \rightarrow \infty} F(E) = \lim_{n_r \rightarrow \infty} \frac{n_v}{n_r} = P(E)$$

Equazione 6

Questa definizione è dovuta a R. Von Mises. Altri fautori di questo approccio sono stati G. Castelnuovo ed E. Kamke.

Si noti che il limite dell'Equazione 6 non è da considerarsi in senso stretto, come quello del calcolo differenziale (vedi cap. 6). Se così fosse, si dovrebbe ammettere che, considerato un certo $\varepsilon > 0$, dovrebbe esistere un certo $\nu \in N$ tale che $\forall n_r > \nu$ la differenza $|F(E) - P(E)| < \varepsilon$. Tuttavia, non sempre questo ν è individuabile con certezza, ovvero, non sempre si può conoscere dopo quante prove la frequenza approssimerà con un certo grado di esattezza la probabilità.

Si consideri ora un esperimento perfettamente riproducibile con risultati equiprobabili. È pensabile determinare le probabilità dei risultati dell'esperimento mediante la definizione classica. In effetti, si nota che, al crescere delle prove, ordinariamente, la frequenza $F(E)$ di un evento E tende ad approssimare proprio il valore della probabilità classica $P(E)$. Si noti che, in questo caso, la frequenza e la probabilità classica, sebbene legate dalla relazione dell'Equazione 6, restano due concetti profondamente distinti per la loro natura. La frequenza è un numero che non può essere conosciuto se non si effettuano delle prove di un esperimento. Si tratta pertanto di una grandezza misurata sperimentalmente e determinabile **a posteriori** (dopo l'esperimento). La probabilità nel senso classico del termine è un valore che si può determinare senza effettuare le prove dell'esperimento, ma analizzando lo spazio campionario ad esso associato. Pertanto essa è un concetto teorico, definibile a priori, ossia senza delle prove sperimentali.

La legge empirica del caso (Equazione 6) permette di estendere il concetto di probabilità a tutti quei casi in cui è possibile svolgere una serie di prove di un esperimento senza che le condizioni varino. Pertanto, in essa sono contemplati anche casi non gestibili mediante la probabilità classica; ad esempio quando i risultati non sono equiprobabili. L'Equazione 6 definisce quindi una nuova probabilità che viene detta **probabilità statistica** o **frequentista**. Per conoscere la probabilità statistica è necessario svolgere numerose prove di un esperimento e notare che al crescere delle prove le frequenze con cui si verifica un evento tendono ad assumere un certo valore identificato appunto con la probabilità. Si può quindi fornire la seguente definizione statistica o frequentista della probabilità:

“La probabilità statistica di un evento aleatorio è un numero capace di prevedere la frequenza dell'evento per un numero di prove sufficientemente elevato di un esperimento ripetibile sempre nelle medesime condizioni”.



Esempio

Si supponga di disporre di una puntina da disegno e di lanciarla per osservare in quale posizione giunge a terra. Vi saranno due possibili risultati di questo esperimento:

- 1) la puntina può poggiare con la testa a terra (Figura 3a);
- 2) la puntina può poggiare con il gambo appuntito e con il bordo della testa a terra (Figura 3b).

In linea del tutto generale, appare arbitrario sostenere che le due configurazioni sono equiprobabili (come nel caso di una moneta). Pertanto, la definizione classica di probabilità non può essere adottata. Non resta altro che lanciare un elevato numero di volte la puntina e osservare il numero di volte che si verificano i risultati 1 e 2, per ricavare le frequenze dei due eventi elementari associati a tali risultati. Per un numero alto di prove, tali frequenze possono essere assunte, con buona approssimazione, come le probabilità dei due eventi elementari.

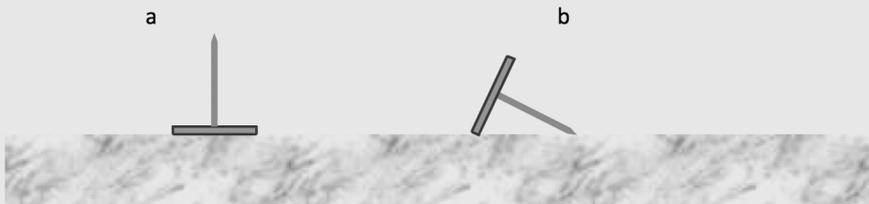


Figura 3

La probabilità statistica trova applicazione anche in indagini statistiche nelle quali si misurano le frequenze relative. Per comprendere questo aspetto, si anticipano alcuni concetti che saranno chiariti in seguito. Si considera una determinata popolazione (di individui oppure di oggetti) che viene indicata con U e detta **universo statistico**. Da tale popolazione, si estrae, con delle tecniche adeguate, un campione rappresentativo C , ossia un sottoinsieme di oggetti o di individui che rifletta in pieno le caratteristiche dell'intera popolazione. Il sottoinsieme C di U è detto **campione statistico**. Più raramente è possibile far coincidere il campione con l'intero universo statistico. Individuato il campione statistico, si dice che esso è costituito da **unità statistiche** che corrispondono agli individui o agli oggetti che costituiscono il campione statistico. A questo punto si inizia l'indagine sul campione. Per ciascuna unità statistica del campione, viene rivelata la caratteristica che è oggetto di studio (mediante un questionario posto all'individuo o mediante un test svolto sull'oggetto). Ogni singola rilevazione su ciascuna unità statistica viene identificata come una **prova** dell'esperimento che conduce ad un certo risultato. Tale risultato verifica oppure non verifica l'**evento** di cui si vuole determinare la frequenza. Compiuta l'indagine, si ottiene una frequenza per l'evento studiato. Se il numero di rilevazioni è