il nuovo concorso a cattedra

COMPRENDE ESTENSIONI ONLINE

Scienze Matematiche applicate

Manuale per la preparazione alle prove scritte e orali

Classe di concorso:
A47 Scienze matematiche applicate | A048 Matematica applicata

Emiliano Barbuto e Santo Calabrese

EdiSES

Accedi
ai **servizi riservati**

COLLEGATI AL SITO **EDISES.IT**

ACCEDI AL **MATERIALE DIDATTICO**

SEGUI LE **ISTRUZIONI**

Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it** e accedere ai **servizi** e **contenuti riservati**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie

Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.
L'**accesso ai servizi riservati** ha la durata di **un anno** dall'attivazione del codice e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticati tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*

EdiSES

il **nuovo** concorso
a cattedra

Scienze **Matematiche applicate**

Manuale per la preparazione alle prove scritte e orali

di Emiliano Barbuto e Santo Calabrese

EdiSES

Il nuovo Concorso a Cattedra – Scienze matematiche applicate - I Edizione

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2020 2019 2018 2017 2016

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

Autori:
Emiliano Barbuto
Santo Calabrese
Daniela Decembrino (per le Unità di Apprendimento)

Progetto grafico: ProMedia Studio di A. Leano - Napoli
Grafica di copertina e fotocomposizione: curvilinee
Redazione: EdiSES - Napoli
Stampato presso Litografia Sograte S.r.l. – Città di Castello (PG)
Per conto della EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

www.edises.it
info@edises.it

ISBN 978 88 6584 637 7

Sommario

Parte Prima
Matematica

Parte Seconda
Matematica applicata

Parte Terza
Esempi di Unità di Apprendimento

Finalità e struttura dell'opera

Il presente volume si pone come utile strumento di studio per quanti si apprestano alla preparazione al concorso a cattedra per le classi il cui programma d'esame comprende la **Matematica applicata**, e contiene sia le principali **conoscenze teoriche** necessarie per superare tutte le fasi della selezione concorsuale che preziosi **spunti operativi** per l'ordinaria attività d'aula.

Il testo è strutturato in parti. La **prima parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali.

La **seconda parte** tratta gli argomenti fondamentali della **Matematica finanziaria e attuariale** e della **Ricerca operativa**. Un'utile **Appendice**, inserita alla fine della seconda parte, espone le principali figure della storia della matematica e della matematica applicata.

L'ultima parte del testo è infine incentrata sulla **pratica dell'attività d'aula** e contiene un esempio di **Unità di Apprendimento** utilizzabile come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa. Ulteriori Unità di Apprendimento potranno essere consultate registrandosi al nostro sito, dalla propria area riservata.

Questo lavoro, ricco, complesso, denso di rinvii normativi e spunti operativi per l'attività dei futuri insegnanti, tratta materie in continua evoluzione.

Ulteriori **materiali didattici** e **approfondimenti** sono disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nel frontespizio del volume.

Altri aggiornamenti sulle procedure concorsuali saranno disponibili sui nostri profili social

Facebook.com/ilconcorsoacattedra
Clicca su (**Facebook**) per ricevere gli aggiornamenti
www.concorsoacattedra.it

Indice

Parte Prima
Matematica

Parte seconda
Matematica applicata

Parte Terza
Esempi di Unità di Apprendimento

Capitolo 7
Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica

7.1 Definire la probabilità

7.1.1 Esperimento, insieme universo ed eventi

Si consideri un qualsiasi **esperimento** mediante il quale si realizzano un insieme di **condizioni** di partenza indicate con y. Questo esperimento può essere ripetuto più volte, ricreando ciascuna volta le medesime condizioni y. In pratica, si suppone che esso sia un esperimento perfettamente ripetibile. Ogni ripetizione dell'esperimento viene detta **prova** o **tentativo**. L'esperimento può avere un certo numero di esiti possibili, detti anche **risultati** dell'esperimento. Questi risultati sono ben distinti tra loro. Pertanto, ad ogni prova si può ottenere un risultato. L'insieme dei risultati possibili, indicato con U, è anche detto **spazio campionario** (o **insieme universo**) associato al determinato esperimento. Si suppone che l'insieme U sia finito o numerabile, ossia che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con un insieme finito del tipo $\{1,2,\ldots,n\}$ con $n \in N$, oppure che possa essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei naturali N. Qualsiasi sottoinsieme E di U è detto **evento**. Si noti che, in particolare, un evento E può contenere anche più risultati dell'esperimento (vedi Figura 1).

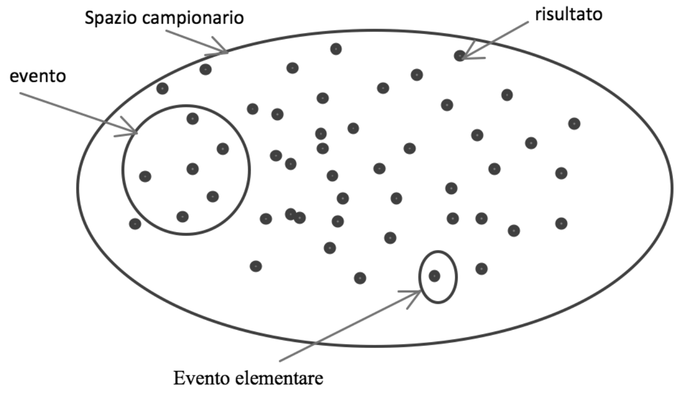

Figura 1

Vi sono particolari tipi di eventi. Un evento **elementare** è tale da riferirsi ad un singolo risultato dell'esperimento, pertanto l'evento elementare è un sottoinsieme di U che contiene un singolo elemento (vedi Figura 1). L'evento **certo** è il sottoinsieme di U che coincide con lo stesso insieme U. In pratica, l'evento certo racchiude tutti i possibili risultati dell'esperimento e, pertanto, deve necessariamente verificarsi. L'evento **impossibile** è rappresentato dall'insieme vuoto Ø che è anch'esso un sottoinsieme di U. È impossibile che tale evento si verifichi, quando si svolge una prova dell'esperimento.
In una prova dell'esperimento in questione, si dice che si **è verificato l'evento** E se il risultato dell'esperimento è un elemento del sottoinsieme E di U. Viceversa, si dice che **non si è verificato l'evento** E. Un risultato dell'esperimento che permette ad E di verificarsi viene anche detto **risultato favorevole all'evento** E. Viceversa si parla di **risultato sfavorevole all'evento** E.
Nell'introdurre il concetto di evento, si è supposto che l'insieme U fosse finito o numerabile, asserendo che qualsiasi sottoinsieme di U è un evento. Viceversa, se l'insieme U è continuo, allora non tutti i suoi sottoinsiemi sono degli eventi, in tal caso solo i sottoinsiemi misurabili di U (secondo una misura introdotta nell'insieme) sono definiti come eventi.

7.1.2 Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi

Gli eventi sono stati definiti come dei sottoinsiemi E di un insieme U, pertanto tra essi possono valere le usuali relazioni che sussistono tra insiemi (vedi cap. 1).
Considerati due eventi E_1 ed E_2 di un insieme universo U, da essi è possibile definire l'evento somma, l'evento prodotto e l'evento differenza.
L'**evento somma** è dato dall'unione insiemistica dei due eventi:

$$E = E_1 \cup E_2$$

Questo evento si verifica se si verifica l'evento E_1 oppure l'evento E_2 o entrambi (si rammenti che i due eventi possono contenere anche uno o più risultati in comune).
L'**evento prodotto** è dato dall'intersezione insiemistica dei due eventi:

$$E = E_1 \cap E_2$$

L'evento prodotto E si verifica se si verificano entrambi gli eventi E_1 ed E_2.
L'**evento differenza** dei due eventi è dato dal complemento di E_2 rispetto ad E_1.

$$E = E_1 - E_2$$

L'evento differenza E si verifica se è verificato E_1, ma non è verificato E_2.
Considerato un evento E, si può definire il suo **evento opposto**, indicato con $\overline{E}$. Esso è pari al complemento di E rispetto ad U.

$$\overline{E} = U - E$$

Si noti che $\overline{E} \cup E = U$, mentre $\overline{E} \cap E = \varnothing$.
Sussistono inoltre le seguenti relazioni tra eventi.

Si dice che l'evento E_1 **implica** l'evento E_2 se E_1 è contenuto in E_2:

$$E_1 \subseteq E_2$$

Questa relazione indica che se si verifica l'evento E_1, allora l'evento E_2 deve necessariamente verificarsi.
Due eventi E_1 ed E_2 si dicono **incompatibili** (o **mutuamente incompatibili**) se la loro intersezione è nulla.

$$E_1 \cap E_2 = \emptyset$$

In tal caso il verificarsi di uno dei due eventi esclude necessariamente il verificarsi dell'altro.
Un insieme di n eventi E_1, E_2,…,E_n viene detto **sistema completo di eventi** se l'unione degli eventi è pari all'insieme universo U.

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = U$$

Se gli eventi E_1, E_2,…, E_n sono tutti mutuamente incompatibili, ossia $E_k \cap E_j = \emptyset, \forall E_k, E_j$, allora E_1, E_2,…, E_n viene detto **sistema completo di eventi incompatibili.**
Dopo aver definito gli eventi come sottoinsiemi dell'insieme U ed aver identificato particolari tipi di eventi e particolari relazioni che possono sussistere tra gli eventi, viene spontaneo chiedersi come si possa quantificare la possibilità che uno o più di questi eventi si verifichino nell'effettuare una prova dell'esperimento. Si vuole pertanto attribuire a ciascun evento un numero che sia indice della possibilità che esso si verifichi. Tale numero viene detto **probabilità**. Va detto subito che il percorso verso la definizione della probabilità in modo coerente e completo ha coinvolto diversi studiosi, ciascuno dei quali ha fornito una propria definizione di probabilità. Il passo conclusivo è stato l'introduzione di una teoria assiomatica della probabilità che ha raccolto come casi particolari le definizioni precedenti. Questo percorso viene affrontato nei paragrafi successivi.

7.1.3 Definizione classica della probabilità

Si suppone di effettuare un esperimento che presenti una **simmetria** nei risultati (negli esiti). Per via di tale simmetria, nessuno degli esiti è quantitativamente differente dagli altri. Questa simmetria influenza anche l'insieme universo U che risulta formato da eventi elementari che hanno tutti la stessa possibilità di verificarsi. Tali eventi vengono detti **equiprobabili**. Da tale denominazione si comprende che la probabilità di tutti questi eventi elementari deve avere il medesimo valore numerico. Quando si effettua una prova dell'esperimento, essa può dare un esito corrispondente all'evento elementare E_i. In tal caso si dice che la prova **è favorevole all'evento elementare** E_i oppure **verifica l'evento elementare** E_i. Tutti gli eventi elementari, oltre ad essere equiprobabili, sono anche **incompatibili**. Questo significa che se una prova è favorevole ad un evento elementare E_i, ciò esclude automaticamente che

tale prova sia favorevole o possa verificare qualsiasi altro evento elementare dell'insieme universo *U.* Ovviamente, anche in questo caso si possono definire eventi che sono unioni di eventi elementari e si può parlare di prove favorevoli ad eventi qualsiasi.
In queste ipotesi si formula la seguente **definizione classica di probabilità**.
"La probabilità di un evento aleatorio previsto in una determinata prova di un esperimento è il rapporto tra il numero di risultati favorevoli al verificarsi dell'evento ed il numero di tutti i risultati possibili, essendo questi ultimi equiprobabili e mutuamente incompatibili."
Questa definizione è stata inizialmente formulata da P.S. Laplace e rivista in seguito da C.F. Pierce.
Si noti che tale definizione di probabilità esula da qualsiasi verifica sperimentale. Questo comporta che la probabilità secondo la definizione classica può essere calcolata mediante schemi teorici e conosciuta prima di effettuare le prove dell'esperimento. Per tale motivo essa è anche detta **probabilità a priori** (è nota prima dell'esperimento).
Stando alla definizione appena fornita, la probabilità $P(E)$ di un evento E può essere scritta come:

$$P(E) = \frac{n_f}{n_p}$$

Equazione 1

dove n_f è il numero dei risultati favorevoli (al verificarsi di E) e n_p è il numero dei risultati possibili.
Da tale definizione si deducono le seguenti proprietà:

$$P(E) \geq 0$$

Difatti la probabilità è il rapporto di due numeri naturali.
La **probabilità dell'evento certo**, ossia U, vale:

$$P(U) = \frac{n_p}{n_p} = 1$$

Considerati due eventi incompatibili E_1 ed E_2, deve necessariamente accadere che gli n_{f1} risultati favorevoli al verificarsi di E_1 non possano coincidere con gli n_{f2} risultati favorevoli al verificarsi di E_2.
Pertanto le probabilità dei due eventi valgono:

$$P(E_1) = \frac{n_{f1}}{n_p}; P(E_2) = \frac{n_{f2}}{n_p}$$

Inoltre la probabilità dell'evento somma è data da:

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{n_{f1} + n_{f2}}{n_p} = \frac{n_{f1}}{n_p} + \frac{n_{f2}}{n_p} = P(E_1) + P(E_2)$$

Quindi vale la seguente **proprietà additiva della probabilità**:

$$E_1 \cap E_2 = \varnothing \Rightarrow P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

Equazione 2

Si noti che un evento e il suo opposto sono incompatibili, ossia $\overline{E} \cap E = \varnothing$, ed inoltre la loro unione corrisponde ad U. Applicando la proprietà additiva (Equazione 2) a questi due eventi si può scrivere:

$$P(\overline{E}) + P(E) = P(\overline{E} \cup E) = P(U) = 1$$

da cui si ottiene la **probabilità dell'evento opposto**:

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Equazione 3

Si noti inoltre che $U \cup \varnothing = U$, pertanto il vuoto e l'insieme universo sono incompatibili. Quindi si ha:

$$P(U) + P(\varnothing) = P(U \cup \varnothing) = P(U) = 1$$

da cui

$$1 + P(\varnothing) = 1$$

Si ricava che la **probabilità dell'evento impossibile** è:

$$P(\varnothing) = 0$$

Si considerino due eventi E_1 ed E_2 tali che $E_1 \subseteq E_2$ (E_1 implica E_2). Sussiste la relazione insiemistica (vedi Figura 2):

$$E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1)$$

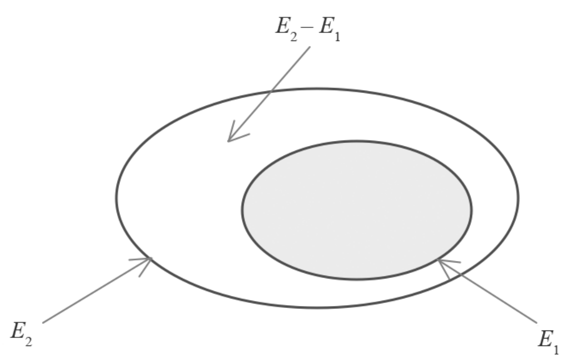

Figura 2

Inoltre i due eventi E_1 ed E_2–E_1 sono incompatibili. Quindi si può scrivere:

$$P(E_2) = P(E_1 \cup (E_2 - E_1)) = P(E_1) + P(E_2 - E_1) \geq P(E_1)$$

Pertanto sussiste la seguente **proprietà di monotonia**:

$$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow P(E_1) \leq P(E_2)$$

Se un evento E_1 è incluso in un secondo evento E_2, allora la probabilità di E_1 è maggiorata da quella di E_2.
Un qualsiasi evento E include l'insieme vuoto $\varnothing$ ed è a sua volta incluso nell'insieme universo U. Quindi si può scrivere dall'equazione:

$$\varnothing \subseteq E \subseteq U \Rightarrow 0 \leq P(E) \leq 1$$

La probabilità di un evento qualsiasi è un numero razionale compreso fra 0 e 1.
Considerato un sistema completo di n eventi **incompatibili** E_1, E_2,…, E_n con $E_k \cap E_j = \varnothing, \forall E_k, E_j$ si ha che:

$$E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = U$$

Pertanto, applicando l'Equazione 2 si può scrivere:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = P(U)$$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) = 1$$

$$P(E_1) + P(E_2) + \ldots + P(E_n) = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} P(E_i) = 1$$

Equazione 4

Esempi

1) Nel lancio di un dado, lo spazio campionario è costituito da sei eventi: E_1 = "il dado mostra la faccia 1", E_2 = "il dado mostra la faccia 2", …, E_6 = "il dado mostra la faccia 6". Si calcola la probabilità che si verifichi l'evento E_6 lanciando un dado. I risultati possibili sono 6 (le 6 facce del dado) quindi n_p = 6, mentre i risultati favorevoli sono 1 (il numero 6), quindi n_f = 1. Per cui, applicando l'Equazione 1, si ha:

$$\mathrm{P}(E_6) = \frac{\mathrm{n}_f}{\mathrm{n}_p} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17$$

In quanto numero puro, la probabilità viene spesso espressa in percentuale. Quindi si ha $P(E_6) \approx 17\%$.

La probabilità che non esca sei (l'evento opposto) è determinata mediante l'Equazione 3:

$$P\left(\overline{E_6}\right)=1-\ P\left(E_6\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}\approx 0{,}83=83\%$$

Infine si noti che la somma delle probabilità di tutti gli eventi possibili (tra loro mutuamente incompatibili) è pari ad 1 (Equazione 4):

$$P(1)+P(2)+P(3)+P(4)+P(5)+P(6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=1$$

2) In riferimento al gioco del Lotto, si vuole determinare la probabilità di indovinare l'estrazione di uno dei cinque numeri estratti (la cinquina) su una ruota. Si suppone di puntare sul numero *m*. Occorre chiedersi, di tutte le possibili cinquine, quante contengano *m*. Il numero *m* è fissato, mentre per gli altri 89 numeri bisogna considerare tutte le loro combinazioni a 4 a 4 da affiancare ad *m* per ottenere la cinquina. 89 elementi a gruppi di 4 possono essere combinati secondo il coefficiente:

$$C_{89,4}=\frac{89!}{\left(89-4\right)!4!}=\frac{89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=89\cdot 22\cdot 29\cdot 43=2441626$$

Questo coefficiente rappresenta tutte le combinazioni favorevoli all'estrazione di *m* (cinquine vincenti). La probabilità di indovinare l'estratto è data dal numero di combinazioni (cinquine) vincenti $C_{89,4}$ diviso per il numero di cinquine possibili, ossia di tutte le combinazioni dei 90 numeri presi a gruppi di 5 $C_{90,5}$.

$$P_1=\frac{C_{89,4}}{C_{90,5}}=\frac{\dfrac{89!}{85!\cdot 4!}}{\dfrac{90!}{85!\cdot 5!}}=\frac{89!}{\cancel{85!}\cdot 4!}\cdot\frac{\cancel{85!}\cdot 5!}{90!}=\frac{\cancel{89!}}{\cancel{4!}}\cdot\frac{5\cdot\cancel{4!}}{90\cdot\cancel{89!}}=\frac{5}{90}=\frac{1}{18}\approx 0.0556$$

La probabilità di indovinare l'estratto è all'incirca il 5,6%.

3) Per determinare la probabilità di indovinare un ambo, ossia una coppia di numeri della cinquina, si suppone di puntare su di una coppia di numeri *k* e *h*. Gli altri 88 numeri devono essere affiancati ai due numeri *k* e *h* in gruppi di 3 per ottenere una cinquina. 88 elementi a gruppi di 3 possono essere combinati secondo il coefficiente:

$$C_{88,3}=\frac{88!}{\left(88-3\right)!3!}=\frac{88\cdot 87\cdot 86}{3\cdot 2}=88\cdot 29\cdot 43=109736$$

Questo coefficiente rappresenta tutte le combinazioni favorevoli all'estrazione dei due numeri dell'ambo; per cui la probabilità di indovinare l'ambo è data dal numero di combinazioni (cinquine) vincenti $C_{88,3}$ diviso per il numero di cinquine possibili $C_{90,5}$.

$$P_2=\frac{C_{88,3}}{C_{90,5}}=\frac{2}{801}\approx 0.002497$$

Pertanto la probabilità di indovinare l'ambo è all'incirca lo 0,25%.

La definizione classica di probabilità lascia aperti alcuni problemi. Un primo evidente problema nasce fin dal momento in cui si pone la definizione stessa. Quando si espone il concetto di simmetria dei risultati sperimentali, si introduce uno spazio campionario che ha eventi "equiprobabili", senza avere ancora parlato della "probabilità". In pratica, la definizione di probabilità viene data attraverso il concetto di eventi che hanno la stessa probabilità di verificarsi. Con tale ragionamento si innesca un "circolo vizioso" che mina alla radice la definizione di probabilità. Oltre questo problema formale, vi è anche una evidente limitatezza della definizione, dovuta alla possibilità di analizzare solo esperimenti in cui tutti i risultati hanno la stessa probabilità. Ad esempio, verrebbe da chiedersi come trattare un dado truccato nel quale tutte le facce non hanno la stessa probabilità di uscire. Inoltre, il numero di risultati dell'esperimento, e quindi degli eventi possibili, è sempre considerato finito. Nella trattazione di esperimenti con un numero infinito di risultati per mezzo della probabilità classica emergono alcune difficoltà.
Pertanto, la definizione classica di probabilità risulta incompleta; nasce, quindi, la necessità di una nuova definizione di probabilità che possa contemplare anche i casi non trattati dalla definizione classica.

7.1.4 Definizione frequentista (o statistica) della probabilità

Le critiche mosse alla definizione classica di probabilità e lo sviluppo delle scienze sperimentali hanno portato ad una nuova definizione di probabilità di un evento, legata al concetto di frequenza dell'evento stesso. Si supponga di ripetere più volte un esperimento, sempre con il medesimo insieme di condizioni perfettamente riproducibili, e di annotare quante volte il risultato dell'esperimento sia favorevole al verificarsi di un certo evento E. Sia n_v questo numero di risultati favorevoli e sia n_r il numero di volte che l'esperimento è stato ripetuto con le medesime condizioni. La **frequenza relativa** dell'evento E viene indicata mediante il rapporto:

$$F(E) = \frac{n_v}{n_r}$$

Equazione 5

Al crescere del numero n_r di prove effettuate, si nota sperimentalmente che questo numero subisce variazioni casuali. Tuttavia, queste variazioni mostrano una certa regolarità e si concentrano intorno ad un determinato valore. L'ampiezza delle variazioni casuali diminuisce al crescere del numero di prove effettuate.
Da tali osservazioni, viene formulata la seguente **legge empirica del caso**:
"Se si effettua un gran numero di prove di un esperimento, tutte nelle medesime condizioni riproducibili, la frequenza relativa di un evento aleatorio, per il quale la probabilità resta costante al crescere del numero delle prove, tende

ordinariamente a differire in modo sempre minore dalla probabilità dell'evento. Tale differenza diminuisce in modulo al crescere delle prove effettuate".
Questo asserto viene anche riassunto nella seguente relazione simbolica:

$$\lim_{n_r \to \infty} F(E) = \lim_{n_r \to \infty} \frac{n_v}{n_r} = P(E)$$

Equazione 6

Questa definizione è dovuta a R. Von Mises. Altri fautori di questo approccio sono stati G. Castelnuovo ed E. Kamke.
Si noti che il limite dell'Equazione 6 non è da considerarsi in senso stretto, come quello del calcolo differenziale (vedi cap. 6). Se così fosse, si dovrebbe ammettere che, considerato un certo $\varepsilon > 0$, dovrebbe esistere un certo $\nu \in N$ tale che $\forall n_r > \nu$ la differenza $\left|F(E) - P(E)\right| < \varepsilon$. Tuttavia, non sempre questo v è individuabile con certezza, ovvero, non sempre si può conoscere dopo quante prove la frequenza approssimerà con un certo grado di esattezza la probabilità.
Si consideri ora un esperimento perfettamente riproducibile con risultati equiprobabili. È pensabile determinare le probabilità dei risultati dell'esperimento mediante la definizione classica. In effetti, si nota che, al crescere delle prove, ordinariamente, la frequenza $F(E)$ di un evento E tende ad approssimare proprio il valore della probabilità classica $P(E)$. Si noti che, in questo caso, la frequenza e la probabilità classica, sebbene legate dalla relazione dell'Equazione 6, restano due concetti profondamente distinti per la loro natura. La frequenza è un numero che non può essere conosciuto se non si effettuano delle prove di un esperimento. Si tratta pertanto di una grandezza misurata sperimentalmente e determinabile **a posteriori** (dopo l'esperimento). La probabilità nel senso classico del termine è un valore che si può determinare senza effettuare le prove dell'esperimento, ma analizzando lo spazio campionario ad esso associato. Pertanto essa è un concetto teorico, definibile a priori, ossia senza delle prove sperimentali.
La legge empirica del caso (Equazione 6) permette di estendere il concetto di probabilità a tutti quei casi in cui è possibile svolgere una serie di prove di un esperimento senza che le condizioni varino. Pertanto, in essa sono contemplati anche casi non gestibili mediante la probabilità classica; ad esempio quando i risultati non sono equiprobabili. L'Equazione 6 definisce quindi una nuova probabilità che viene detta **probabilità statistica** o **frequentista**. Per conoscere la probabilità statistica è necessario svolgere numerose prove di un esperimento e notare che al crescere delle prove le frequenze con cui si verifica un evento tendono ad assumere un certo valore identificato appunto con la probabilità.
Si può quindi fornire la seguente definizione statistica o frequentista della probabilità:
"La probabilità statistica di un evento aleatorio è un numero capace di prevedere la frequenza dell'evento per un numero di prove sufficientemente elevato di un esperimento ripetibile sempre nelle medesime condizioni".

Esempio

Si supponga di disporre di una puntina da disegno e di lanciarla per osservare in quale posizione giunge a terra. Vi saranno due possibili risultati di questo esperimento:
1) la puntina può poggiare con la testa a terra (Figura 3a);
2) la puntina può poggiare con il gambo appuntito e con il bordo della testa a terra (Figura 3b).

In linea del tutto generale, appare arbitrario sostenere che le due configurazioni sono equiprobabili (come nel caso di una moneta). Pertanto, la definizione classica di probabilità non può essere adottata. Non resta altro che lanciare un elevato numero di volte la puntina e osservare il numero di volte che si verificano i risultati 1 e 2, per ricavare le frequenze dei due eventi elementari associati a tali risultati. Per un numero alto di prove, tali frequenze possono essere assunte, con buona approssimazione, come le probabilità dei due eventi elementari.

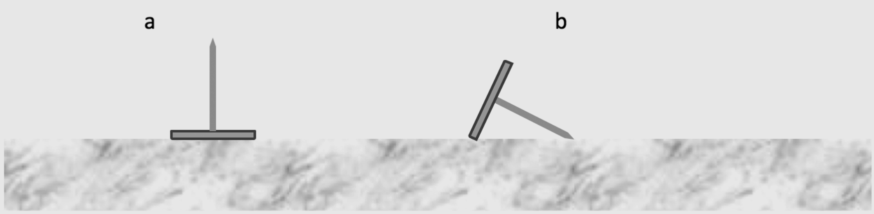

Figura 3

La probabilità statistica trova applicazione anche in indagini statistiche nelle quali si misurano le frequenze relative. Per comprendere questo aspetto, si anticipano alcuni concetti che saranno chiariti in seguito. Si considera una determinata popolazione (di individui oppure di oggetti) che viene indicata con U e detta **universo statistico**. Da tale popolazione, si estrae, con delle tecniche adeguate, un campione rappresentativo C, ossia un sottoinsieme di oggetti o di individui che rifletta in pieno le caratteristiche dell'intera popolazione. Il sottoinsieme C di U è detto **campione statistico**. Più raramente è possibile far coincidere il campione con l'intero universo statistico. Individuato il campione statistico, si dice che esso è costituito da **unità statistiche** che corrispondono agli individui o agli oggetti che costituiscono il campione statistico. A questo punto si inizia l'indagine sul campione. Per ciascuna unità statistica del campione, viene rivelata la caratteristica che è oggetto di studio (mediante un questionario posto all'individuo o mediante un test svolto sull'oggetto). Ogni singola rilevazione su ciascuna unità statistica viene identificata come una **prova** dell'esperimento che conduce ad un certo risultato. Tale risultato verifica oppure non verifica l'**evento** di cui si vuole determinare la frequenza. Compiuta l'indagine, si ottiene una frequenza per l'evento studiato. Se il numero di rilevazioni è