

il **nuovo** concorso
a cattedra

COMPRENDE
ESTENSIONI
ONLINE

Matematica

nella scuola secondaria
di secondo grado

Manuale per la preparazione alle prove scritte e orali

Classi di concorso:

A26 Matematica | **A047** Matematica

A27 Matematica e Fisica | **A049** Matematica e Fisica

a cura di **Emiliano Barbuto**



Accedi ai servizi riservati



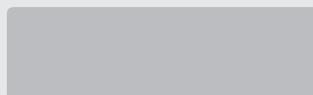
COLLEGATI AL SITO
EDISES.IT

ACCEDI AL
MATERIALE DIDATTICO

SEGUI LE
ISTRUZIONI

Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it** e accedere ai **servizi e contenuti riservati**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie



Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.

L'**accesso ai servizi riservati** ha la durata di **un anno** dall'attivazione del codice e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticati tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*

il **nuovo** concorso
a cattedra

Matematica

nella scuola secondaria
di secondo grado

Manuale per la preparazione alle prove scritte e orali

a cura di **Emiliano Barbuto**



Il nuovo Concorso a Cattedra – Matematica nella scuola secondaria di secondo grado – II Edizione
Copyright © 2016, 2012, EdISES S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2020 2019 2018 2017 2016

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

Autori:

Emiliano Barbuto

Daniela Decembrino (per le Unità di Apprendimento)

Progetto grafico: ProMedia Studio di A. Leano – Napoli

Fotocomposizione: Oltrepagina – Verona

Grafica di copertina:  CURVILINE

Redazione: EdISES – Napoli

Stampato presso Litografia Sograte S.r.l. – Città di Castello (PG)

Per conto della EdISES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 978 88 6584 629 2

www.edises.it
info@edises.it

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi all'indirizzo redazione@edises.it

Sommario

Parte Prima La didattica della matematica

Capitolo 1 La matematica nel quadro normativo europeo	3
Capitolo 2 La matematica nel quadro del II ciclo di istruzione.....	19
Capitolo 3 Rilevazione degli apprendimenti e didattica della matematica	57
Capitolo 4 Teorie dell'apprendimento e didattica della matematica.....	83
Capitolo 5 Software didattici	123

Parte Seconda Contenuti disciplinari

Capitolo 1 Il linguaggio matematico	157
Capitolo 2 Algoritmi e computabilità.....	199
Capitolo 3 Insiemi, relazioni e funzioni	263
Capitolo 4 Insiemi numerici	279
Capitolo 5 Algebra	333
Capitolo 6 Spazi vettoriali e sistemi lineari.....	387
Capitolo 7 Geometria euclidea, geometrie non euclidee e trigonometria.....	453
Capitolo 8 Le trasformazioni geometriche.....	493
Capitolo 9 Il metodo analitico in geometria.....	547
Capitolo 10 Geometria proiettiva, spazi topologici e programma di Klein	603
Capitolo 11 Calcolo differenziale per funzioni di una variabile.....	663
Capitolo 12 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili	761
Capitolo 13 Il problema della misura e il calcolo integrale.....	795
Capitolo 14 Serie numeriche, serie di funzioni ed equazioni differenziali.....	839
Capitolo 15 Calcolo numerico	913
Capitolo 16 Calcolo combinatorio e probabilità.....	967



Capitolo 17 Statistica descrittiva e analisi statistica univariata	1049
Capitolo 18 Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale.....	1119
Capitolo 19 Storia della matematica.....	

Parte Terza

Esempi di Unità di Apprendimento

Premessa	1185
Unità di Apprendimento 1 Parliamo il “geometriche” : lessico geometrico “poco” familiare!	1201
Unità di Apprendimento 2 Cogito ergo sum	1213
Unità di Apprendimento 3 Espressioni logiche.....	1229
Unità di Apprendimento 4 Come contano i marziani?	
Unità di Apprendimento 5 Chi ha paura della matematica?.....	

Finalità e struttura dell'opera

Il presente lavoro è concepito come supporto per quanti si accingono ad affrontare le prove del concorso a cattedra e costituisce un valido strumento di ausilio per tutti coloro che intendono intraprendere la professione docente.

L'opera è divisa in tre parti: la prima parte è di carattere metodologico-didattico ed ordinamentale; la seconda parte affronta i contenuti delle discipline, così come proposti nelle attuali Indicazioni e Linee guida dell'istruzione secondaria e come ripresi nel programma del concorso a cattedra; la terza parte affronta la pratica dell'attività didattica e contiene esempi di Unità di Apprendimento. La complessità della scuola moderna ci ha imposto non poche riflessioni nella stesura del volume, dalle quali è risultata un'opera che intende contribuire a formare un docente che:

- sia in possesso dei contenuti della disciplina ad un livello spesso superiore a quello che gli viene richiesto dalla didattica in classe;
- sia un professionista della comunicazione, un individuo che ha maturato capacità empatiche ed un abile gestore del contesto classe.

La “scuola dei programmi” prescrittivi ed obbligatori, da dover terminare entro la fine dell'anno scolastico, anche a rischio di lasciare indietro qualche alunno più bisognoso di supporto, ha gradualmente lasciato il posto alla “scuola della programmazione” che ha tentato di adeguare al contesto classe, attraverso un continuo lavoro di feedback, l'attività di insegnamento e gli obiettivi da conseguire. Negli ultimi due decenni, la “scuola della programmazione” ha lasciato definitivamente il posto alla “scuola dell'autonomia e della personalizzazione”. In queste due espressioni è riassunto tutto il moderno approccio della didattica. L'autonomia scolastica, declinata in tutte le sue forme, permette a ciascuna scuola di creare un proprio curriculum da proporre alla sua utenza. Questo curriculum è il frutto dell'interazione della istituzione scolastica con il “territorio” e con tutti gli *stakeholder*, sicché ciascuna scuola diventa una cellula vitale nella realtà sociale ed economica del territorio ed è demandata a svolgere una o più funzioni specifiche, di carattere fondamentale per la realtà che la circonda. In tal modo i curriculum scolastici vengono declinati sul mondo reale e l'istituzione scolastica finisce con l'avvicinarsi ad esso.

Alle caratteristiche specifiche di ogni singola istituzione scolastica, si aggiungono gli stili cognitivi e le particolari inclinazioni di ogni singolo alunno. Ecco, quindi, che subentra la personalizzazione del percorso di apprendimento e la capacità del docente di adeguare la propria didattica, non più al contesto classe, dove potrebbe essere recepita solo “in media” e non “singolarmente”, ma piuttosto al singolo alunno, quale “realtà” cognitiva specifica e irripetibile. Perché la personalizzazione dell'apprendimento abbia luogo, il docente deve

avvalersi di un'approfondita conoscenza dei contenuti che vuole proporre. In questo modo, egli riesce a declinarli con proprietà ed incisività, mettendo in rilievo tutti gli aspetti critici. Analogamente, il docente deve essere in grado di operare con padronanza e sicurezza usando le nuove tecnologie. Sono queste ultime che possono mettere in rilievo gli stili cognitivi degli alunni, la loro propensione a comprendere attraverso canali di comunicazione multimodale, usando simulazioni, immagini in movimento, narrazioni sonore, diagrammi, piuttosto che il solo testo. È opinione comune che, in futuro, il testo perderà la propria funzione predominante di veicolo per la trasmissione della conoscenza e sarà affiancato (anche se non sostituito), con pari dignità, da altri veicoli (suoni, immagini, simulazioni) con i quali gli studenti di oggi hanno già familiarizzato.

L'attenzione si sposta quindi dalla pratica di insegnamento del docente al processo di apprendimento dello studente. Questo vuol dire che la didattica trasmissiva, fatta di una mole interminabile di nozioni che allo studente rischiano di apparire vuote di significati, occorre sostituire una didattica improntata alla maturazione delle competenze negli alunni. Questi ultimi devono cogliere l'utilità di quello che studiano e devono riuscire a richiamarne il significato in un contesto reale, essendo capaci di applicare quello di cui sono entrati in possesso. Inutile dire che la didattica delle discipline matematiche e scientifiche risente particolarmente di queste criticità e potrebbe beneficiare oltremodo di un approccio multimodale nella dinamica di insegnamento ed apprendimento. Le discipline matematiche e scientifiche devono far maturare nello studente quelle competenze che lo rendano cittadino partecipe e cosciente della società di domani. Pertanto il docente deve sapersi allontanare dalla cattedra ed avvicinarsi ai banchi, assumendo anche il ruolo di tutor, ossia di professionista della formazione, di persona che coglie i bisogni reali degli alunni e declina la propria disciplina in base a tali necessità.

In particolare, la matematica deve diventare la “matematica dell'utile”, affinché chi si avvicina ad essa possa comprenderne l'importanza in contesti pratici e reali che certamente contribuiscono a rendere la disciplina più affascinante agli occhi di chi la studia.

Le ultime indagini internazionali (OCSE-PISA, IEA-TIMMS) e le prove del servizio nazionale di valutazione a cura dell'INVALSI sono orientate proprio a mettere in evidenza questi aspetti della disciplina. Probabilmente gli scarsi risultati conseguiti dagli studenti italiani nelle precedenti indagini internazionali sulle materie scientifiche hanno messo in evidenza che questo approccio alla disciplina viene poco seguito nella scuola italiana. Come controprova, l'evidente miglioramento dei risultati nell'ultima indagine OCSE-PISA, determinato in buona parte dal miglioramento dei risultati nelle regioni meridionali che in precedenza avevano segnato il passo, è frutto di una serie di interventi sistemici che il Ministero, gli enti di ricerca e le istituzioni scolastiche hanno posto in essere negli ultimi anni.

La “matematica del pratico e dell'utile” assolve anche ad un altro obiettivo istituzionale, ossia la maturazione delle competenze di base, in corrispondenza

della fine dell'obbligo formativo. L'obbligo formativo termina al compimento del sedicesimo anno di età dello studente, ossia in corrispondenza della conclusione del primo biennio della scuola secondaria di secondo grado. Al raggiungimento di tale traguardo, lo studente deve aver maturato delle competenze non solo matematiche ma in tutti i principali assi culturali, delineati dalle discipline che sono oggetto di studio.

Nel percorso successivo, ormai fuori dall'obbligo formativo, la “matematica dell'utile” tende ad essere sostituita dalla “matematica del formale”. La formalizzazione diventa uno strumento irrinunciabile, lì dove lo studente voglia affrontare problemi complessi ed articolati e voglia maturare l'abilità di compiere deduzioni logico formali. A questo punto la padronanza di contenuti specifici e piuttosto “tecnici” della disciplina diventa una prerogativa indispensabile per svolgere una didattica incisiva.

Avendo presente questo quadro generale, si è provato a proporre un lavoro che mettesse il candidato in contatto sia con la “matematica dell'utile”, sia con la “matematica del formale”. Anche in questo le tre parti del volume assolvono a compiti ben precisi.

Nella **prima parte** viene presentato il quadro ordinamentale specifico della matematica e vengono proposte delle problematiche reali di gestione dei tempi e della classe che il docente deve affrontare nell'attività didattica; vengono, inoltre, illustrate diverse metodologie didattiche alla luce delle distinte teorie dell'apprendimento. Vi è infine una particolare attenzione nel presentare le nuove tecnologie per la didattica, dalla LIM (la lavagna interattiva multimediale) ai software specifici per la matematica (geometria dinamica, calcolo simbolico). In questa fase si forniscono anche diversi spunti ed idee per attività da svolgere in classe. In ogni caso, la didattica e l'approccio laboratoriale alla disciplina costituiscono l'aspetto fondante e il denominatore comune di questa parte del volume.

Nella **seconda parte** del volume si è cercato di affrontare i contenuti della disciplina nel modo più compendioso e completo possibile, in relazione anche alla necessità di contenere l'estensione del volume. Si è cercato di fornire sia approcci formali e rigorosi, sia approcci più pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può aver affrontato. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali. Ad esempio, parlando del calcolo combinatorio, si è fatto riferimento al gioco o ad altri problemi pratici; parlando di logica si sono affrontate questioni di linguistica e di semantica; nella geometria proiettiva si è affrontato il problema della prospettiva, mentre nella geometria affine si è accennato al problema delle ombre. Quando si è parlato di spazi vettoriali si è fatto riferimento alla fisica, mentre per la statistica vi sono numerosi riferimenti a problemi pratici da trattare con indagini statistiche. Nella parte teorica di informatica si affrontano questioni pratiche su come codificare i numeri nella memoria delle macchine.



La speranza e l'augurio per chi legge è quello di aver realizzato un'opera che possa contribuire, anche se in minima parte ed in modo irrilevante, a formare una classe docente, quella del futuro, che possa raccogliere la sfida che gli attuali docenti affrontano quotidianamente, conseguendo successi significativi nella loro professione, al fine di migliorare la scuola e farne uno strumento, non solo di apprendimento, ma anche di crescita civile e sociale.

La **terza parte** del testo è, infine, incentrata sulla **pratica dell'attività didattica** e contiene esempi di **Unità di Apprendimento** e di organizzazione di attività di classe utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Materiali didattici integrativi e approfondimenti saranno resi disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nel frontespizio del volume.

Altri aggiornamenti sulle procedure concorsuali saranno disponibili sui nostri profili social

Facebook.com/ilconcorsoacattedra

Clicca su mi piace (**Facebook**) per ricevere gli aggiornamenti
www.concorsoacattedra.it

Indice

Parte Prima La didattica della matematica

Capitolo 1 - La matematica nel quadro normativo europeo

1.1	Le competenze chiave per l'apprendimento permanente.....	3
1.1.1	La strategia di Lisbona e l'apprendimento permanente.....	3
1.1.2	Le competenze chiave per l'apprendimento permanente.....	4
1.1.3	La matematica nelle otto competenze.....	6
1.2	Le indicazioni per il curriculum del primo ciclo di istruzione.....	7
1.2.1	Gli aspetti innovativi delle Indicazioni per il curriculum.....	7
1.2.2	La matematica nelle Indicazioni per il curriculum.....	9
1.2.3	Le nuove Indicazioni per il curriculum.....	12
1.3	Le competenze chiave di cittadinanza e l'asse matematico.....	13
1.3.1	Gli assi culturali e le competenze chiave per la cittadinanza.....	13
1.3.2	L'asse matematico.....	15
1.3.3	Il quadro delle competenze comuni a tutti i percorsi di istruzione.....	17

Capitolo 2 - La matematica nel quadro del II ciclo di istruzione

2.1	La riforma del secondo ciclo di istruzione.....	19
2.1.1	La "Riforma Gelmini".....	19
2.1.2	L'autonomia scolastica.....	20
2.2	La matematica nelle Indicazioni nazionali per i licei.....	20
2.2.1	L'impianto della riforma ordinamentale dei licei.....	20
2.2.2	La matematica nel quadro orario dei nuovi licei.....	22
2.2.3	La valutazione periodica in matematica.....	23
2.2.4	Il carattere delle Indicazioni nazionali per i licei.....	24
2.2.5	Gli obiettivi specifici di apprendimento della matematica nei licei.....	25
2.2.6	La matematica nei licei Artistico, Classico, Linguistico, Musicale e Coreutico, delle Scienze Umane.....	27
2.2.7	La matematica nell'opzione economico sociale del liceo delle Scienze Umane.....	29
2.2.8	La matematica nel liceo Scientifico e nell'opzione scienze applicate.....	30
2.2.9	Confronto analitico tra il liceo Scientifico e gli altri licei.....	32
2.3	La matematica nelle Linee Guida per gli Istituti Tecnici.....	38
2.3.1	L'impianto ordinamentale dei nuovi istituti tecnici.....	38
2.3.2	La matematica nel quadro orario dei nuovi tecnici.....	41



2.3.3	Le linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento.....	41
2.3.4	La matematica come insegnamento di istruzione generale nei due settori degli istituti tecnici al primo biennio	43
2.3.5	La matematica come insegnamento di istruzione generale nel triennio dei due settori degli istituti tecnici.....	47
2.3.6	La matematica come insegnamento di indirizzo nel secondo biennio del settore tecnologico.....	51
2.4	La matematica nelle Linee Guida per gli Istituti Professionali	52
2.4.1	L'impianto ordinamentale dei nuovi istituti professionali.....	52
2.4.2	Le linee guida per il passaggio al nuovo ordinamento.....	54
2.4.3	La matematica nel quadro orario dei nuovi professionali e nelle linee guida.....	55

Capitolo 3 - Rilevazione degli apprendimenti e didattica della matematica

3.1	Le rilevazioni Invalsi.....	57
3.1.1	L'Invalsi e la rilevazione degli apprendimenti nella scuola secondaria di secondo grado	57
3.1.2	La prova di matematica	58
3.1.3	I contenuti matematici.....	59
3.1.4	I processi.....	62
3.1.5	Le prove Invalsi: come sono strutturate e cosa rilevano.....	63
3.2	L'indagine OCSE-PISA	66
3.2.1	Aspetti generali dell'indagine	66
3.2.2	Competenze.....	66
3.2.3	Contenuti, processi, capacità soggiacenti e contesto.....	69
3.2.4	Analisi delle prove OCSE-PISA.....	71
3.3	La didattica per competenze in matematica	73
3.3.1	I risultati della scuola italiana nelle prove OCSE-PISA.....	73
3.3.2	Le cause dei risultati poco soddisfacenti dell'Italia in matematica.....	74
3.3.3	Approccio formale e teorico alla disciplina.....	76
3.3.4	Approccio laboratoriale e contestualizzato alla disciplina	79
3.4	L'indagine IEA-TIMSS	80

Capitolo 4 - Teorie dell'apprendimento e didattica della matematica

4.1	Le teorie dell'apprendimento	83
4.1.1	Comportamentismo	83
4.1.2	Cognitivismo e strutturalismo	84
4.1.3	Costruttivismo.....	89
4.2	La didattica nell'era digitale e nell'era del Web 2.0	91
4.2.1	I nativi digitali.....	91
4.2.2	Il Web e il connettivismo	93
4.3	Nuove tecnologie per la didattica	96
4.3.1	La Lavagna Interattiva Multimediale (LIM).....	96
4.3.2	La LIM: collocazione nell'aula, calibrazione e aspetti tecnici.....	98
4.3.3	Prospettive didattico-metodologiche della LIM.....	102
4.3.4	I learning management system (LMS)	102

4.4	Metodologie didattiche.....	104
4.4.1	Didattica tradizionale e didattica laboratoriale.....	104
4.4.2	La lezione frontale	105
4.4.3	L'apprendimento collaborativo	106
4.4.4	L'apprendimento cooperativo	109
4.4.5	Il peer tutoring.....	110
4.4.6	Il team teaching.....	111
4.4.7	La ricerca-azione	114
4.5	Problematiche della pianificazione dell'attività didattica	117
4.5.1	Metodologie didattiche e tempistica.....	117
4.5.2	Piani di studio e apprendimenti personalizzati.....	118
4.5.3	I vincoli posti dalla normativa alla pianificazione didattica	118
4.5.4	Consigli per impostare il lavoro in classe	120

Capitolo 5 - Software didattici

5.1	Software di Geometria Dinamica	124
5.1.1	Panoramica sui software di geometria dinamica.....	124
5.1.2	Geogebra – funzionalità di carattere generale.....	125
5.1.3	Costruzione e verifica delle proprietà del baricentro di un triangolo....	127
5.1.4	Costruzione e verifica delle proprietà dell'ortocentro di un triangolo..	132
5.1.5	Costruzione di una parabola i cui parametri variano dinamicamente ...	135
5.1.6	Il significato geometrico della derivata di una funzione in un punto	138
5.2	I software di calcolo simbolico	140
5.2.1	Panoramica sui software di calcolo simbolico	140
5.2.2	wxMaxima – funzionalità di carattere generale	142
5.2.3	Calcoli algebrici.....	143
5.2.4	Calcolo letterale	145
5.2.5	Risoluzione di equazioni e sistemi di equazioni.....	148
5.2.6	Calcoli di analisi matematica e rappresentazione delle funzioni.....	150

Parte Seconda

Contenuti disciplinari

Capitolo 1 - Il linguaggio matematico

1.1	Il metodo assiomatico	157
1.1.1	Le teorie matematiche	157
1.1.2	La definizione dei termini	157
1.1.3	Distinzione tra termine e concetto: teorie realistiche e teorie formali ..	158
1.1.4	La dimostrazione dei teoremi	159
1.1.5	L'assioma nelle teorie realistiche e nelle teorie formali.....	160
1.1.6	Sistema assiomatico di una teoria formale	161
1.1.7	Coerenza, indipendenza e completezza di un sistema di assiomi.....	162

1.1.8	I teoremi di incompletezza di Godel	163
1.2	La logica come studio del linguaggio	164
1.2.1	Grafemi e fonemi	164
1.2.2	Parole ed enunciati	165
1.2.3	Argomenti, concetti e livelli di astrazione	165
1.2.4	Significati e significanti	166
1.2.5	<i>Type e token</i>	167
1.2.6	Predicati ed enunciati aperti	168
1.2.7	Linguaggio naturale e artificiale (simbolico)	168
1.3	Logica degli enunciati	169
1.3.1	Valore di verità di un enunciato	169
1.3.2	Enunciati semplici, composti e connettivi logici	170
1.3.3	La negazione “non”	171
1.3.4	La congiunzione “e”	172
1.3.5	La disgiunzione inclusiva “o”	172
1.3.6	La disgiunzione esclusiva “o... o...”	173
1.3.7	L’implicazione materiale “se... allora...”	174
1.3.8	La doppia implicazione “... se e solo se...”	175
1.3.9	Espressioni di enunciati	176
1.3.10	Espressioni equiverdiche	176
1.3.11	I connettivi NAND e NOR e le formule di De Morgan	178
1.3.12	Calcolo di tutti i possibili enunciati ricavabili da due enunciati	179
1.3.13	Basi dei connettivi logici	180
1.3.14	Tautologie e contraddizioni	180
1.4	Assiomatizzazione della logica degli enunciati	182
1.4.1	Gli enunciati e il loro significato nel linguaggio naturale	182
1.4.2	Metalinguaggio e linguaggio oggetto	183
1.4.3	Regole logiche (regole di inferenza)	185
1.4.4	Grammatica	188
1.4.5	Morfologia e sintassi	188
1.4.6	Semantica	189
1.5	La logica dei predicati	191
1.5.1	Introduzione	191
1.5.2	I quantificatori	191
1.5.3	Morfologia e sintassi del calcolo dei predicati del primo ordine	193
1.5.4	Semantica dei predicati	195
1.5.5	Metateoria	198

Capitolo 2 - Algoritmi e computabilità

2.1	L’informatica: i dati e gli algoritmi	199
2.2	Costanti, variabili e strutture di dati	201
2.3	Algoritmi strutturati	202
2.4	Modalità di rappresentazione di un algoritmo	203
2.4.1	Pseudo-linguaggio	203
2.4.2	Diagrammi di flusso	204
2.5	Tipologie di algoritmi	206

2.5.1	Algoritmi con struttura sequenziale.....	206
2.5.2	Algoritmi con struttura condizionale.....	207
2.5.3	Algoritmi con struttura iterativa.....	211
2.5.4	Le funzioni	217
2.5.5	Algoritmi con struttura ricorsiva	218
2.6	Linguaggi di programmazione.....	220
2.7	Il linguaggio C.....	223
2.7.1	Uso delle variabili.....	223
2.7.2	Uso degli operatori	224
2.7.3	Uso delle strutture di dati.....	225
2.7.4	Sintassi generale e funzioni.....	227
2.7.5	Codici con strutture sequenziali	228
2.7.6	Codici con strutture condizionali e iterative.....	230
2.8	Complessità computazionale.....	235
2.9	Verso una definizione formale di algoritmo.....	240
2.9.1	Le funzioni computabili (calcolabili)	240
2.9.2	La macchina di Turing.....	240
2.9.3	Esempio di macchina di Turing.....	242
2.9.4	Funzioni T-computabili e macchina di Turing universale.....	245
2.10	Il calcolatore di Von Neumann	246
2.11	Altre macchine per l'esecuzione di algoritmi	247
2.12	Funzioni ricorsive.....	248
2.12.1	Definizioni preliminari.....	248
2.12.2	Funzioni base.....	249
2.12.3	Composizione.....	249
2.12.4	Ricorsione.....	250
2.12.5	Funzioni ricorsive primitive.....	250
2.12.6	Minimalizzazione	250
2.12.7	Funzioni ricorsive (funzioni ricorsive parziali)	251
2.13	Tesi di Church	251
2.14	Lo studio dei problemi risolvibili mediante un algoritmo	252
2.14.1	Insiemi, proprietà e problemi decidibili	252
2.14.2	Problemi semi-decidibili e insiemi effettivamente enumerabili	254
2.14.3	Esempi di problemi decidibili e semi-decidibili.....	257
2.14.4	Il problema della fermata di una macchina di Turing	259
2.14.5	La cardinalità degli algoritmi e dei problemi	260

Capitolo 3 - Insiemi, relazioni e funzioni

3.1	Concetti fondamentali.....	263
3.2	Relazione di inclusione.....	264
3.3	Operazioni tra insiemi	265
3.4	Insieme delle parti	268
3.5	Coppia ordinata e prodotto cartesiano.....	268
3.6	Relazione binaria.....	269
3.7	Relazioni di equivalenza	271
3.8	Relazioni d'ordine largo.....	272

3.9	Relazioni d'ordine stretto.....	273
3.10	Funzioni.....	273
3.11	Funzioni suriettive, iniettive e biiettive.....	275
3.12	Funzioni composte.....	277
3.13	Funzione inversa e identità.....	277

Capitolo 4 - Insiemi numerici

4.1	Leggi di composizione interne ed esterne.....	279
4.2	L'insieme dei numeri naturali.....	279
4.2.1	Assiomi di Peano.....	280
4.2.2	Addizione di naturali.....	281
4.2.3	Moltiplicazione di naturali.....	283
4.2.4	Relazione d'ordine nei naturali.....	284
4.2.5	La divisione euclidea.....	285
4.2.6	La potenza.....	287
4.3	Rappresentazione dei numeri naturali.....	287
4.3.1	I primi modi di rappresentare i numeri naturali.....	287
4.3.2	Il sistema di numerazione dell'antica Roma.....	288
4.3.3	Il sistema di numerazione decimale.....	289
4.3.4	Il sistema di numerazione binario.....	290
4.3.5	Conversioni.....	291
4.4	L'insieme dei numeri interi.....	292
4.5	I numeri razionali.....	296
4.5.1	Definizione dell'insieme dei numeri razionali.....	296
4.5.2	Operazioni nell'insieme dei numeri razionali.....	297
4.5.3	La relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali.....	298
4.5.4	Scrittura posizionale dei numeri razionali.....	299
4.6	Le problematiche che portano alla nascita dei numeri reali.....	301
4.6.1	La scrittura posizionale.....	301
4.6.2	L'estrazione di radice.....	301
4.6.3	Le grandezze incommensurabili.....	301
4.6.4	Le soluzioni di equazioni a coefficienti interi.....	303
4.6.5	La quadratura del cerchio.....	304
4.7	La costruzione dell'insieme dei numeri reali.....	304
4.7.1	Primo approccio: la notazione posizionale.....	304
4.7.2	Secondo approccio: i tagli di Dedekind.....	304
4.7.3	Terzo approccio: le successioni di numeri razionali.....	308
4.8	Numeri irrazionali, numeri algebrici e numeri trascendenti.....	308
4.8.1	I numeri irrazionali.....	308
4.8.2	Numeri che sono zeri di un polinomio: i numeri algebrici.....	309
4.8.3	Numeri che non sono zeri di un polinomio: i numeri trascendenti.....	310
4.9	Numeri complessi.....	311
4.9.1	I problemi aperti dopo l'estensione ai numeri reali.....	311
4.9.2	Costruzione dei numeri complessi.....	312
4.9.3	Forma algebrica dei numeri complessi.....	313

4.9.4	Rappresentazione geometrica e forma trigonometrica dei numeri complessi	314
4.9.5	Operazioni sui numeri complessi in forma trigonometrica	315
4.9.6	Teorema fondamentale dell'algebra	318
4.10	Cardinalità di un insieme	319
4.10.1	Insiemi equipotenti e numeri cardinali	319
4.10.2	Operazioni tra numeri cardinali	320
4.10.3	Insiemi finiti e insiemi numerabili	321
4.10.4	Insiemi numerici numerabili	323
4.10.5	Insiemi numerici non numerabili	326
4.10.6	L'ipotesi del continuo	330
 Capitolo 5 - Algebra		
5.1	Le strutture algebriche	333
5.1.1	Definizione di struttura algebrica	333
5.1.2	Proprietà associativa e semigruppì	333
5.1.3	Esistenza dell'elemento neutro e monoidi	334
5.2	I gruppi	334
5.2.1	Esistenza dell'elemento inverso	334
5.2.2	Definizione di gruppo	335
5.2.3	Proprietà commutativa e gruppi abeliani	335
5.2.4	Gruppi finiti, infiniti e finitamente generati, insiemi di generatori	336
5.3	Aritmetica modulare	338
5.3.1	Congruenza modulo n	338
5.3.2	Teoremi dell'aritmetica modulare	338
5.3.3	Classi di congruenza modulo n e insieme quoziente	339
5.3.4	Gruppi definiti mediante la relazione di congruenza	340
5.4	Gruppi ciclici	342
5.4.1	Caratteristiche di un gruppo ciclico e periodo degli elementi	342
5.4.2	Gruppi additivi	343
5.4.3	Gruppi moltiplicativi	343
5.5	Tavole di Cayley	345
5.6	Prodotto di gruppi	346
5.7	I sottogruppi e i laterali destro e sinistro	347
5.7.1	Definizione di sottogruppo	347
5.7.2	Classi laterali	347
5.7.3	Sottogruppi normali	349
5.8	Gruppi risolubili	353
5.9	I gruppi simmetrici	354
5.9.1	Permutazioni	354
5.9.2	Il gruppo simmetrico delle permutazioni	355
5.9.3	Cicli e trasposizioni	356
5.9.4	Le permutazioni pari e il gruppo alterno	360
5.9.5	Risolubilità dei gruppi simmetrici S_2 , S_3 e S_4	361
5.9.6	Il gruppo simmetrico S_5	363
5.10	Gruppo diedrale	364

5.10.1	Definizione	364
5.10.2	Interpretazione geometrica.....	365
5.11	Isomorfismo tra gruppi e gruppi isomorfi	370
5.12	Anelli.....	374
5.12.1	Definizione	374
5.12.2	Anello dei polinomi	375
5.13	Corpi e campi.....	377
5.13.1	Definizioni	377
5.13.2	Estensione di un campo.....	378
5.13.3	Campo di spezzamento (o campo di riducibilità completa)	380
5.14	Teoria di Galois	382
5.14.1	L'idea	382
5.14.2	Gruppo di Galois.....	383
5.14.3	Risolubilità per radicali di un'equazione di grado n	385

Capitolo 6 - Spazi vettoriali e sistemi lineari

6.1	Gli spazi vettoriali	387
6.1.1	Definizione di spazio vettoriale	387
6.1.2	Sottospazio.....	390
6.1.3	Combinazione lineare di vettori	391
6.1.4	Dipendenza e indipendenza lineare.....	392
6.1.5	Generatori e basi.....	393
6.1.6	Dimensione di uno spazio vettoriale.....	395
6.2	Applicazioni lineari	396
6.2.1	Definizione di applicazione lineare	396
6.2.2	Composizione di applicazioni lineari	397
6.2.3	Un esempio di spazio vettoriale: lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari	397
6.2.4	Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare	398
6.2.5	Particolari applicazioni lineari	399
6.3	Matrici	400
6.3.1	Definizioni	400
6.3.2	Lo spazio vettoriale delle matrici	401
6.3.3	Moltiplicazione tra matrici	404
6.3.4	Corrispondenza tra matrici ed applicazioni lineari	409
6.3.5	Isomorfismo tra matrici e applicazioni lineari	413
6.3.6	Matrici associate ad endorfismi, matrici simili	413
6.3.7	Composizione di applicazioni lineari e matrici.....	414
6.4	Determinanti	414
6.4.1	Definizione e calcolo del determinante di una matrice	414
6.4.2	Proprietà del determinante di una matrice.....	420
6.4.3	Rango di una matrice.....	423
6.5	Sistemi lineari	427
6.5.1	Definizione di sistema lineare	427
6.5.2	Sistemi lineari compatibili	428
6.5.3	Soluzioni di sistemi lineari quadrati	429

6.5.4	Soluzioni di sistemi lineari generici	430
6.5.5	Procedura per la risoluzione di un generico sistema	431
6.5.6	Matrice inversa	437
6.5.7	Sistemi lineari omogenei	440
6.6	Diagonalizzazione di matrici	443
6.6.1	Autovettore, autovalore e autospazio	443
6.6.2	Matrici diagonalizzabili	444
6.6.3	Algoritmo per diagonalizzare le matrici	445
6.6.4	Polinomi e condizioni di diagonalizzazione	447
6.6.5	Segnatura di una matrice	447

Capitolo 7 - Geometria euclidea, geometrie non euclidee e trigonometria

7.1	Gli <i>Elementi</i> di Euclide	453
7.1.1	La struttura degli <i>Elementi</i> di Euclide	453
7.1.2	Definizioni, assiomi e postulati nel primo libro degli <i>Elementi</i>	453
7.1.3	Il quinto postulato di Euclide	456
7.1.4	Il quinto postulato e la struttura del primo libro degli <i>Elementi</i>	457
7.2	La nascita delle geometrie non euclidee	461
7.2.1	Sostituire il quinto postulato	461
7.2.2	Dimostrare il quinto postulato: il tentativo di Saccheri	462
7.2.3	La nascita delle geometrie non euclidee	464
7.2.4	Una assiomatica per la geometria euclidea	465
7.2.5	La curvatura di una linea e di una superficie	466
7.3	Modelli di geometrie non euclidee	469
7.3.1	Il modello di Klein di geometria iperbolica	470
7.3.2	Il modello di Poincaré di geometria iperbolica	472
7.3.3	Il modello di Riemann di geometria sferica	473
7.4	La trigonometria	475
7.4.1	Relazioni trigonometriche per un triangolo rettangolo	475
7.4.2	Teorema dei seni e teorema della corda	480
7.4.3	Teorema delle proiezioni e teorema di Carnot (o del coseno)	480
7.4.4	Risoluzione di un triangolo qualsiasi	481
7.4.5	Formule per il calcolo dell'area di un triangolo	486
7.4.6	Formule per il calcolo del raggio della circonferenza circoscritta e inscritta in un triangolo	489

Capitolo 8 - Le trasformazioni geometriche

8.1	Spazio affine	493
8.1.1	Definizione di spazio affine	493
8.1.2	Proprietà dello spazio affine	495
8.1.3	Lo spazio vettoriale come spazio affine	496
8.1.4	Sottospazio affine e spazio direttore	497
8.1.5	Sottospazi affini paralleli, incidenti e sghembi	500
8.1.6	Intersezione e unione di sottospazi affini, spazio congiungente	501
8.1.7	Dimensioni di sottospazi affini e vettoriali	501
8.1.8	Dipendenza e indipendenza affine	504

8.1.9	Riferimento e coordinata affine.....	505
8.2	Trasformazione affine e affinità	507
8.2.1	Definizioni.....	507
8.2.2	Proprietà.....	508
8.2.3	Rappresentazione matriciale delle trasformazioni affini.....	508
8.2.4	Rappresentazione matriciale delle affinità di uno spazio in sé.....	509
8.3	Trasformazioni affini tra piani e affinità nel piano.....	511
8.3.1	Trasformazioni affini.....	511
8.3.2	Affinità.....	515
8.3.3	Proprietà delle affinità.....	516
8.3.4	Punti uniti di una trasformazione.....	520
8.3.5	Le similitudini e il gruppo Euclideo.....	523
8.3.6	Particolari similitudini: omotetie.....	528
8.3.7	Isometrie.....	531
8.3.8	Isometrie dirette.....	532
8.3.9	Isometrie inverse.....	540
8.3.10	Riepilogo.....	544

Capitolo 9 - Il metodo analitico in geometria

9.1	Punti, rette e vettori nello spazio euclideo.....	547
9.2	Geometria analitica nel piano.....	549
9.2.1	Punti nel piano cartesiano.....	549
9.2.2	Vettori nel piano cartesiano.....	550
9.2.3	Le curve algebriche.....	553
9.3	Curve algebriche di primo grado: le rette.....	554
9.3.1	Equazione di una retta in forma parametrica.....	554
9.3.2	Equazione di una retta in forma implicita.....	555
9.3.3	Intersezione di due rette.....	555
9.3.4	Rette: casi particolari.....	558
9.3.5	Equazione della retta in forma segmentaria.....	559
9.3.6	Equazione della retta in forma esplicita.....	560
9.3.7	Fasci di rette.....	561
9.3.8	Alcune relazioni utili sulla retta.....	563
9.4	Curve algebriche di secondo grado: le coniche.....	565
9.4.1	Classificazione di una conica.....	565
9.4.2	Riduzione a forma normale di una conica.....	568
9.4.3	Le coniche come sezioni di un cono a due falde.....	574
9.5	Geometria analitica nello spazio.....	576
9.5.1	Punti nello spazio.....	576
9.5.2	Vettori nello spazio.....	577
9.6	Superfici algebriche di primo grado: i piani.....	581
9.6.1	Equazione parametrica del piano.....	581
9.6.2	Equazione generale del piano.....	581
9.6.3	Equazioni di piani particolari.....	585
9.6.4	Intersezione di due piani e condizione di parallelismo.....	586
9.7	Le rette nello spazio.....	587

9.7.1	Equazioni parametriche della retta	587
9.7.2	Equazioni normali della retta.....	588
9.7.3	Equazioni generali ed equazioni ridotte della retta	588
9.7.4	Intersezione tra retta e piano (rette e piani paralleli).....	592
9.7.5	Rette parallele e perpendicolari.....	593
9.7.6	Piani paralleli e perpendicolari.....	595
9.7.7	Rette e piani perpendicolari.....	595
9.7.8	Distanza di un punto da un piano	596
9.8	Superfici algebriche di secondo ordine: le quadriche	596
9.8.1	Classificazione di una quadrica.....	596

Capitolo 10 - Geometria proiettiva, spazi topologici e programma di Klein

10.1	L'idea della geometria proiettiva	603
10.1.1	La prospettiva	603
10.1.2	La retta proiettiva.....	604
10.1.3	Il piano proiettivo	606
10.1.4	Coordinate omogenee nel piano proiettivo.....	611
10.1.5	Spazio proiettivo e coordinate omogenee nello spazio.....	612
10.1.6	Definizione operativa di spazio proiettivo	613
10.2	Spazi proiettivi.....	615
10.2.1	Definizione	615
10.2.2	Spazio proiettivo di dimensione n sul campo K	616
10.2.3	Sottospazio proiettivo	617
10.2.4	Dipendenza e indipendenza lineare.....	619
10.2.5	Intersezione di sottospazi e spazio congiungente	620
10.2.6	Formula di Grassmann per i sottospazi proiettivi	620
10.2.7	Applicazioni proiettive e proiettività.....	621
10.3	Operare con le coordinate omogenee.....	626
10.3.1	Rette nel piano	626
10.3.2	Coniche in coordinate omogenee	628
10.4	Le proiettività	630
10.4.1	Proiettività sulla retta proiettiva	630
10.4.2	Punti uniti.....	631
10.4.3	Il birapporto	634
10.4.4	Proiettività sul piano	636
10.4.5	Punti uniti e rette unite	639
10.4.6	Studio della prospettiva	645
10.5	Spazi topologici e trasformazioni topologiche.....	652
10.5.1	Spazi metrici	652
10.5.2	Intorno circolare di un punto	653
10.5.3	Successione convergente	654
10.5.4	Successione di Cauchy	654
10.5.5	Applicazioni continue e uniformemente continue	655
10.5.6	Dallo spazio metrico allo spazio topologico	655
10.5.7	Spazi topologici	656
10.5.8	Classificazione dei punti rispetto ad un sottoinsieme.....	657

10.5.9	Insiemi aperti e definizione alternativa di spazio topologico	658
10.5.10	Insiemi chiusi e definizione alternativa di spazio topologico	659
10.5.11	Chiusura, frontiera e parte interna di un insieme	659
10.5.12	Sottospazi topologici	660
10.5.13	Applicazioni continue e trasformazioni topologiche	660
10.6	Il programma di Erlangen	661

Capitolo 11 - Calcolo differenziale per funzioni di una variabile

11.1	Intervalli e intorni	663
11.1.1	Tipologie di intervalli	663
11.1.2	Intorni e intorni circolari	665
11.2	Funzioni reali di variabili reali	665
11.2.1	Generalità	665
11.2.2	Campo di esistenza ed immagine	667
11.2.3	Funzioni composte	668
11.2.4	Funzioni invertibili	668
11.2.5	Funzioni monotone	669
11.2.6	Funzioni pari e dispari	672
11.2.7	Funzioni periodiche	673
11.2.8	Funzioni elementari	674
11.2.9	Determinazione del campo di esistenza delle funzioni reali	681
11.3	Limite di una funzione	683
11.3.1	Punti di accumulazione	683
11.3.2	Definizione di limite	684
11.3.3	Limiti per funzioni divergenti in un punto	685
11.3.4	Verifica del limite	687
11.3.5	Limite destro e limite sinistro	690
11.3.6	Teoremi sui limiti	692
11.3.7	Operazioni sui limiti	694
11.3.8	Generalizzare le operazioni sui limiti	695
11.3.9	Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli	697
11.3.10	Calcolo di limiti	700
11.4	Successioni e limiti di successioni	704
11.4.1	Definizione e generalità	704
11.4.2	Limite di una successione di numeri reali	707
11.5	Continuità delle funzioni reali	708
11.5.1	Funzione continua	708
11.5.2	Funzione uniformemente continua	713
11.5.3	Punti di discontinuità	714
11.5.4	Individuare i punti di discontinuità di una funzione	716
11.6	Derivata	717
11.6.1	Rapporto incrementale	717
11.6.2	Definizione di derivata e derivabilità	718
11.6.3	Derivata destra e sinistra	719
11.6.4	Continuità e derivabilità	719
11.6.5	Dal rapporto incrementale alla derivata	720

11.6.6	Interpretazione geometrica della derivata	722
11.6.7	Retta tangente ad una funzione in un punto	724
11.6.8	Regole di derivazione.....	725
11.6.9	Calcolo di derivate	725
11.6.10	Punti di discontinuità della derivata	728
11.6.11	Derivate di ordine superiore	731
11.6.12	Differenziale	732
11.7	Calcolo differenziale e studio di una funzione di variabile reale.....	733
11.7.1	Teorema di Rolle, Cauchy e Lagrange.....	733
11.7.2	Condizioni sulla monotonia di una funzione	737
11.7.3	Massimi e minimi assoluti di una funzione	738
11.7.4	Estremo inferiore ed estremo superiore	738
11.7.5	Massimo e minimo relativo.....	740
11.7.6	Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo e assoluto	741
11.7.7	Condizioni su concavità e punti di flesso	745
11.7.8	I teoremi di l'Hopital	747
11.7.9	Asintoti di una funzione	750
11.7.10	Studio del grafico di una funzione	752

Capitolo 12 - Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

12.1	Funzioni definite in R^n e derivate parziali	761
12.1.1	Premessa	761
12.1.2	Vettori, direzioni e basi in R^n	761
12.1.3	Applicazioni lineari e spazio duale	762
12.1.4	Derivata lungo una direzione e derivata parziale	763
12.1.5	Notazioni specifiche per R^2 e R^3 e calcolo delle derivate parziali.....	764
12.2	Il differenziale e le funzioni differenziabili	765
12.2.1	Funzione differenziabile	766
12.2.2	La differenziabilità implica la derivabilità	766
12.2.3	Forma esplicita della derivata lungo una direzione	767
12.2.4	Gradiente e forma esplicita del differenziale	769
12.2.5	La differenziabilità implica la continuità.....	771
12.2.6	Derivate successive e teorema di Schwartz	772
12.2.7	Funzioni di classe C^k	774
12.3	Massimi e minimi relativi per funzioni di più variabili	775
12.3.1	Definizioni	775
12.3.2	Punto stazionario	775
12.3.3	Matrice Hessiana	776
12.3.4	Condizioni sui punti di massimo e minimo relativi	778
12.3.5	Massimi e minimi vincolati	785

Capitolo 13 - Il problema della misura e il calcolo integrale

13.1	Il problema della misura.....	795
13.1.1	Introduzione.....	795
13.1.2	La misura di Peano-Jordan	796
13.1.3	La misura di Vitali-Lebesgue	802



13.2	Integrazione indefinita	804
13.2.1	Definizioni	804
13.2.2	Regole di integrazione	806
13.2.3	Metodi risolutivi per integrali di frazioni algebriche	812
13.3	Integrazione definita	817
13.3.1	Somma inferiore e somma superiore	817
13.3.2	Dalle somme all'integrale di Riemann	819
13.3.3	Le somme di Cauchy-Riemann	820
13.3.4	Funzioni integrabili	822
13.3.5	Proprietà degli integrali definiti	823
13.3.6	Teoremi sull'integrazione definita	824
13.4	Integrali impropri	829
13.4.1	Caso di un intervallo semi-aperto	829
13.4.2	Caso di un intervallo aperto	830
13.4.3	Caso generale: funzione generalmente continua su un intervallo limitato o illimitato	831
13.5	Calcolo di volumi di solidi di rotazione	832
13.6	Lunghezza di una curva ed area della superficie di rotazione	834

Capitolo 14 - Serie numeriche, serie di funzioni ed equazioni differenziali

14.1	Serie numeriche	839
14.1.1	Definizioni	839
14.1.2	Serie a termini positivi, a termini di segno alterno e a termini qualunque	841
14.1.3	La serie geometrica	842
14.1.4	Resto di una serie	843
14.1.5	Teoremi generali sul carattere delle serie	845
14.2	Criteri di convergenza delle serie a termini positivi	846
14.2.1	Premessa	846
14.2.2	Criterio del confronto con l'integrale (Cauchy)	846
14.2.3	La serie di Dirichlet e la serie armonica	847
14.2.4	Criterio del confronto (o di Gauss)	848
14.2.5	Secondo criterio del confronto	849
14.2.6	Criterio del rapporto (o di D'Alembert)	850
14.2.7	Criterio della radice (o di Cauchy)	851
14.3	Criteri di convergenza delle serie a termini alterni e qualunque	852
14.3.1	Criterio di Leibnitz	852
14.3.2	La convergenza assoluta	853
14.3.3	Criteri di Cauchy e D'Alembert per serie a termini a segni alterni o qualunque	854
14.4	Sviluppo in serie di funzioni	855
14.4.1	Le serie di funzioni	855
14.4.2	Le serie di potenze	857
14.4.3	La serie di Mac Laurin	859
14.4.4	Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari	861
14.4.5	La formula di Eulero	864

14.4.6	La serie di Taylor	865
14.4.7	Applicazioni della serie di Taylor	866
14.4.8	La serie di Fourier	872
14.5	Equazioni differenziali	876
14.5.1	Generalità	876
14.5.2	Il problema di Cauchy	877
14.6	Equazioni differenziali del primo ordine	879
14.6.1	Generalità	879
14.6.2	Equazioni del primo ordine a variabili separabili	880
14.6.3	Il teorema di Cauchy	883
14.6.4	Equazioni omogenee del primo ordine di Manfredo	885
14.6.5	Equazioni lineari del primo ordine	887
14.6.6	Equazioni di Bernoulli	890
14.6.7	Equazioni di Lagrange	892
14.6.8	Equazioni di Clairaut	894
14.7	Equazioni differenziali di ordine superiore	896
14.7.1	Integrazione immediata	896
14.7.2	Equazioni di secondo ordine prive del termine in y	897
14.7.3	Equazioni di secondo ordine prive del termine in x	899
14.7.4	Equazioni lineari di ordine qualsiasi	900
14.7.5	Equazioni lineari a coefficienti costanti di ordine qualsiasi	905

Capitolo 15 - Calcolo numerico

15.1	Errori nel calcolo numerico	913
15.1.1	Premessa	913
15.1.2	Rappresentazione esponenziale dei numeri reali	913
15.1.3	I numeri in virgola mobile	915
15.1.4	Perdita di informazione nel calcolo con numeri <i>floating point</i>	917
15.1.5	Arrotondare e troncamento	919
15.1.6	Errore assoluto ed errore relativo	921
15.1.7	Errore assoluto limite ed errore relativo limite	923
15.1.8	Cifre decimali corrette e cifre significative corrette	928
15.2	Propagazione dell'errore	929
15.2.1	Alcune regole basilari di propagazione dell'errore	929
15.2.2	Problema, algoritmo ed elaboratore	931
15.2.3	Condizionamento di un problema	932
15.2.4	Stabilità di un algoritmo	936
15.3	Interpolazione	939
15.3.1	Formula di interpolazione di Newton	939
15.3.2	Formula di interpolazione di Lagrange	947
15.4	Risoluzione approssimata di equazioni	948
15.4.1	Approccio generale	948
15.4.2	Metodo delle corde	950
15.4.3	Metodo di Newton	954
15.4.4	Metodo di Picard	959
15.5	Integrazione numerica	962

15.5.1	Formula dei trapezi.....	962
15.5.2	Formula di Simpson.....	965

Capitolo 16 – Calcolo combinatorio, probabilità e variabili aleatorie

16.1	Calcolo combinatorio	967
16.1.1	Principio di moltiplicazione	967
16.1.2	Fattoriale di un numero	968
16.1.3	Disposizioni con ripetizione	968
16.1.4	Disposizioni	969
16.1.5	Permutazioni	970
16.1.6	Permutazioni con ripetizione	970
16.1.7	Combinazioni	971
16.1.8	Combinazioni con ripetizione.....	972
16.1.9	Il coefficiente binomiale.....	972
16.1.10	Formula del binomio di Newton.....	973
16.1.11	Somma di coefficienti binomiali	974
16.1.12	Il triangolo di Tartaglia.....	974
16.2	Definire la probabilità.....	976
16.2.1	Esperimento, insieme universo ed eventi.....	976
16.2.2	Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi	977
16.2.3	Definizione classica della probabilità.....	978
16.2.4	Definizione frequentista (o statistica) della probabilità	983
16.2.5	Definizione soggettiva di probabilità (o probabilità su scommessa)	988
16.2.6	Definizione assiomatica di probabilità.....	991
16.3	Teoremi fondamentali della teoria della probabilità.....	993
16.3.1	Probabilità dell'evento somma e probabilità dell'evento prodotto.....	993
16.3.2	Probabilità condizionata e probabilità composta	994
16.3.3	Indipendenza stocastica.....	997
16.3.4	Formula della probabilità totale.....	999
16.3.5	Teorema di Bayes	1001
16.4	Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità discrete	1004
16.4.1	Definizione e generalità.....	1004
16.4.2	Caratteristiche delle variabili aleatorie discrete	1009
16.4.3	La distribuzione binomiale.....	1012
16.4.4	La distribuzione geometrica.....	1015
16.4.5	La distribuzione ipergeometrica	1018
16.4.6	La distribuzione di Poisson.....	1020
16.5	Variabili aleatorie e distribuzioni di probabilità continue.....	1023
16.5.1	Definizione e generalità.....	1023
16.5.2	Caratteristiche delle variabili aleatorie continue	1026
16.5.3	Distribuzione uniforme (o rettangolare) continua	1027
16.5.4	Distribuzione esponenziale	1029
16.5.5	Distribuzione normale (o gaussiana).....	1034
16.6	Legge dei grandi numeri e teorema del limite centrale.....	1042
16.6.1	Convergenza in probabilità e legge empirica del caso	1042
16.6.2	Disuguaglianza di Cebyshev.....	1043

16.6.3	La legge dei grandi numeri	1044
16.6.4	Il teorema centrale del limite	1047

Capitolo 17 - Statistica descrittiva e analisi statistica univariata

17.1	Fasi e strumenti dell'indagine statistica	1049
17.1.1	Popolazioni, caratteri e modalità	1049
17.1.2	Caratteri quantitativi e qualitativi.....	1050
17.1.3	Intensità, frequenze assolute e relative	1053
17.1.4	Tabelle e distribuzioni.....	1056
17.1.5	Grafici	1057
17.1.6	Grafici per caratteri qualitativi	1058
17.1.7	Grafici per caratteri quantitativi discreti.....	1062
17.1.8	Grafici per caratteri quantitativi continui.....	1064
17.1.9	Le fasi di una indagine statistica	1067
17.1.10	Analisi statistica univariata.....	1069
17.2	Indici di posizione.....	1070
17.2.1	La media aritmetica	1071
17.2.2	La media geometrica	1074
17.2.3	La media armonica	1076
17.2.4	La media quadratica	1078
17.2.5	Relazione tra le medie algebriche.....	1079
17.2.6	La moda.....	1079
17.2.7	La mediana.....	1081
17.2.8	I quantili	1085
17.3	Indici di variabilità	1086
17.3.1	Campo di variabilità e differenze interquantili	1087
17.3.2	Scarto semplice medio.....	1087
17.3.3	Devianza.....	1089
17.3.4	Varianza e scarto quadratico medio.....	1089
17.3.5	Indici di dispersione relativi	1092
17.3.6	Le differenze medie	1093
17.3.7	La concentrazione.....	1096
17.4	Indici di forma.....	1103
17.4.1	Asimmetria.....	1103
17.4.2	Curtosi.....	1104
17.5	Rapporti statistici.....	1106
17.5.1	Tipologie di rapporti statistici	1106
17.5.2	I numeri indici	1112
17.5.3	I numeri indici complessi	1117

Capitolo 18 - Analisi statistica bivariata, regressione e statistica inferenziale

18.1	Strumenti dell'analisi statistica bivariata.....	1119
18.1.1	Tabelle a doppia entrata	1119
18.1.2	Caratteristiche principali delle tabelle a doppia entrata	1122
18.1.3	Grafici per tabelle semplici.....	1125
18.1.4	Grafici per caratteri quantitativi discreti e per caratteri qualitativi	1126

18.1.5	Grafici per caratteri quantitativi continui.....	1128
18.1.6	Indipendenza assoluta	1131
18.1.7	Dipendenza statistica e connessione.....	1135
18.1.8	Indipendenza in media.....	1139
18.2	La regressione	1141
18.2.1	L'interpolazione statistica e la regressione.....	1141
18.2.2	Regressione lineare con il metodo dei minimi quadrati.....	1142
18.2.3	Determinare la bontà del modello teorico di correlazione	1149
18.2.4	Regressione lineare con tabelle a doppia entrata.....	1152
18.2.5	Regressione quadratica e polinomiale con il metodo dei minimi quadrati	1156
18.2.6	Regressione lineare multipla con il metodo dei minimi quadrati.....	1159
18.3	Statistica inferenziale	1163
18.3.1	Il campione statistico	1163
18.3.2	I parametri, le statistiche e le distribuzioni campionarie	1165
18.3.3	Stima puntuale dei parametri e caratteristiche di un buon estimatore..	1171
18.3.4	Stima puntuale del valore medio (o speranza matematica).....	1172
18.3.5	Stima puntuale della varianza	1173
18.3.6	Stima intervallare e intervalli di confidenza.....	1174
18.3.7	Stima puntuale del valore medio (nota la varianza).....	1176
18.3.8	Verifica delle ipotesi.....	1179
18.3.9	Verifica delle ipotesi sul valor medio (nota la varianza).....	1179
Capitolo 19 - Storia della matematica.....		

Parte Terza

Esempi di Unità di Apprendimento

Premessa

1.	La consapevolezza progettuale del docente	1185
2.	Insegnare matematica.....	1193

Unità di Apprendimento 1	Parliamo il "geometriche": lessico geometrico "poco" familiare!.....	1201
---------------------------------	---	------

Unità di Apprendimento 2	Cogito ergo sum	1213
---------------------------------	-----------------------	------

Unità di Apprendimento 3	Espressioni logiche.....	1229
---------------------------------	--------------------------	------

Unità di Apprendimento 4	Come contano i marziani?	
---------------------------------	--------------------------------	---

Unità di Apprendimento 5	Chi ha paura della matematica?.....	
---------------------------------	-------------------------------------	---

Unità di Apprendimento 1

Parliamo il “geometrico”: lessico geometrico “poco” familiare!

Questa unità di apprendimento si rivolge agli studenti frequentanti la classe prima del primo biennio unitario in obbligo di istruzione di liceo, istituto tecnico, istituto professionale in riferimento alle competenze, abilità e conoscenze indicate nell’Asse matematico dell’allegato 1 al DM n. 139 del 22 agosto 2007 “Fioroni” ripreso nel modello per la certificazione delle competenze in uscita dal primo biennio unitario in obbligo di istruzione (DM n. 9 del 27 gennaio 2010).

Presentazione del progetto

Lo studio della geometria risulta spesso sacrificato nell’ambito della programmazione didattica curricolare, pertanto se ne propone un approccio grafico e colorato basato sull’attività di *matching* e di rubricato che possa supportare l’acquisizione della terminologia specifica di settore.

L’idea della geometria assoluta viene confutata dall’esistenza di varie geometrie basate ciascuna sul proprio sistema di assiomi.

- **Finalità:** introdurre lo studio delle geometrie ponendo le basi del lessico specifico.
- **Risultati di apprendimento:** il passaggio dalla didattica per obiettivi alla didattica per competenze, propria del riordino del secondo ciclo di istruzione, impone la declinazione dei risultati di apprendimento in termini di competenze, abilità, conoscenze così come riportato nell’allegato 1 al DM n. 139 del 22 agosto 2007 “Fioroni” e ripreso dal DM n. 9 del 27 gennaio 2010 (modello di certificazione delle competenze in uscita dal primo biennio di scuola secondaria di secondo grado in obbligo di istruzione):
 - *competenze:* confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni (M2);
 - *abilità:* riconoscere i principali enti, figure e luoghi geometrici e descriverli con linguaggio naturale;
 - *conoscenze:* gli enti fondamentali della geometria e il significato dei termini assioma, teorema, definizione.
- **Competenze acquisite a fine unità:** confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando invarianti e relazioni.

- **Metodi e strategie da adottare:** *brainstorming*, *learning by doing*, rubricato, didattica digitale, discussione guidata.
- **Strumenti:** rubrica formato A5, matite colorate, righello.
- **Tempi di realizzazione:** 8 ore nell'arco di due settimane.
- **Modalità di verifica:** compito assegnato agli studenti. Ogni studente deve possedere una rubrica formato A5 in cui trascrivere, rispettando l'ordine alfabetico, tutti i termini geometrici proposti dal docente: ciascun termine deve essere seguito dalla relativa definizione e dalla corrispondente eventuale rappresentazione grafica. Ogni rubrica deve essere trascritta utilizzando un primo colore per i termini, un secondo colore per le definizioni e un terzo colore per l'eventuale rappresentazione grafica.
- **Valutazione:** griglia di valutazione del lavoro realizzato da ciascun alunno.

Fasi di realizzazione

Fase 1.

tempo: 120'

Il lessico geometrico

Il docente, in aula, enuncia i seguenti termini: assioma, corollario, definizione, teorema, postulato, enunciato, lemma, dimostrazione, ipotesi, proprietà, geometria; invita ciascun alunno a fornire la propria definizione per ciascuno di essi; consulta un dizionario di matematica e legge la definizione di ciascuno dei termini precedentemente proposti; invita ciascun alunno alla trascrizione delle definizioni corrette sulla rubrica personale. Le metodologie proposte sono il *brainstorming*, il *learning by doing*, il rubricato. Ciascuno studente ricopia i termini enunciati dal docente all'interno della propria rubrica rispettando l'ordine alfabetico e utilizzando il primo colore prescelto per la trascrizione dei termini; accoglie l'invito del docente e fornisce la propria definizione per ciascuno dei termini precedentemente trascritti; confronta le proprie definizioni con quelle fornite dagli altri alunni e con quelle lette dal docente; trascrive la definizione corretta nella propria rubrica.

	TERMINI	DEFINIZIONE	GRAFICA
A	Assioma	<p>S.m. Galileo Galilei 1638. Dal greco <i>axioma</i>, “dignità”. Affermazione indimostrabile la cui verità è evidente di per sé. Gli esempi più frequentemente forniti sono: “Il tutto è maggiore della parte”, “Due quantità uguali a una terza sono uguali fra loro”. Si tratterebbe perciò di principi primi che servono da fondamento a ogni edificazione di una costruzione intellettuale che fa appello alla ragione e che si suppone siano irrefutabili da parte di chi è iniziato a questo sapere razionale.</p>	
C	Corollario	<p>S.m. Dal latino <i>corollarius</i>, da <i>corolla</i>, “piccola corona”. Affermazione che deriva immediatamente da un'altra. Conseguenza obbligata di un evento, di un comportamento, di un proposito. L'etimologia del termine <i>corollario</i> può sembrare strana e in effetti la parola si è discostata dal suo significato iniziale di “piccola corona che deve essere offerta in dono”, significato che evocava l'idea di supplemento, di mancia, di gratifica. Fu Boezio nel VI secolo d.C. a introdurre questo termine con il significato di “conseguenza” nella lingua dotta della filosofia, da cui è successivamente passato al linguaggio matematico [...].</p>	
D	Definizione	<p>S.f. Dante Alighieri 1304-1308. Da <i>definire</i>. Definire, dare una definizione, significa descrivere con parole che si suppongono note al lettore oppure all'interlocutore, un oggetto, un'idea, una specie. Nei dizionari si cerca di definire nomi comuni, aggettivi, verbi, in modo che ciò che è oggetto della definizione possa essere conosciuto oppure riconosciuto senza possibilità di confusione. “Poi che dimostrata sufficientemente pare la diffinitione di nobilitate [...] sì che vedere si puote omai che è lo nobile uomo” (Dante, <i>Convivio</i>, IV, 23).</p>	
	Dimostrazione	<p>S.f. Dante Alighieri 1304. Dal latino <i>demonstrare</i>, “mostrare”. Illustrazione delle qualità di un prodotto: “La invitiamo alla nostra dimostrazione!” Manifestazione collettiva: “La strada XYZ non è transitabile a causa di una dimostrazione”. Rendere evidente mediante un'argomentazione: “Gli ha dimostrato che si sbagliava!” Far capire: “Gli avvenimenti dimostrano la necessità di una riforma”.</p>	

segue

	TERMINI	DEFINIZIONE	GRAFICA
E	Enunciato	S.m. Aa.Vv. 1712. Dal latino enunciare. Discorso compiuto nel quale o si afferma o si nega qualcosa.	
G	Geometria	S.f. Aa.Vv. 1294. Dal greco <i>gè</i> , “terra”, e <i>metron</i> , “misura”. Oggi, almeno a partire da un certo livello di studi, si può dire geometria solo insieme a un aggettivo che precisi di quale geometria si tratta: cioè, non si può più parlare di geometria al singolare, ma di geometrie ciascuna costruita secondo il proprio sistema di assiomi.	
I	Ipotesi	S.f. G. Botero 1617. Dal greco <i>hypothesis</i> , da <i>hypo</i> , “al di sotto” e <i>thesis</i> , “azione del posare”; letteralmente “ciò che è posto al di sotto”, da cui “principio”, “supposizione”. Supposizione formulata con lo scopo di essere provata piuttosto che confutata: “partiamo da questa ipotesi e vedrete che i fatti mi daranno ragione”. Interpretazione, spiegazione: “di fronte a un tale comportamento si è a corto di ipotesi”. Eventualità: “nell’ipotesi di un conflitto, le popolazioni si approvvigionano preventivamente [...]”.	
L	Lemma	S.m. 1581. Dal latino <i>lemma</i> , “premessa maggiore di un sillogismo”; dal greco <i>lémma</i> , “premessa maggiore di un sillogismo”, da <i>lambanein</i> , “prendere”. Lemma è un termine di logica che è rimasto nel linguaggio scientifico, in particolare in matematica. Voce di un dizionario e di un’enciclopedia. Un lemma fa parte di un ragionamento [...].	

segue

	TERMINI	DEFINIZIONE	GRAFICA
P	Postulato	<p>S.m. 1630.</p> <p>Dal latino <i>postulatum</i>, da <i>postulare</i>, "chiedere".</p> <p>A partire dal significato matematico, <i>proposizione enunciata senza prove</i>: "la vostra conclusione non vale che a partire da un postulato inaccettabile!"</p> <p><i>Proposizione posta alla base di una teoria che si richiede sia accettata senza dimostrazione; in questo senso il termine postulato è stato oggi sostituito dal termine assioma [...].</i></p>	
	Proprietà	<p>S.f. Aa.Vv. 1294.</p> <p>Dal latino <i>proprietas</i>.</p> <p><i>Qualità che distingue una persona oppure una cosa da un'altra.</i></p> <p><i>Possesso legittimo di un bene [...].</i></p>	
T	Teorema	<p>S.m. B. Varchi 1565.</p> <p>Dal greco <i>theoremata</i>, "ciò che si può contemplare", da <i>theoria</i>, da cui in senso figurato "oggetto di studio" e anche "regola", "principio", "precetto morale".</p> <p><i>Proposizione che in una teoria matematica viene dimostrata logicamente partendo dagli assiomi [...].</i></p> <p><i>Lo schema logico di un teorema è il seguente: da una determinata ipotesi I consegue una certa conclusione oppure tesi T [...].</i></p>	

Fase 2.

tempo: 120'

Gli elementi primitivi

Il docente, in aula, enuncia i seguenti termini: ente, punto, linea, piano, figura, angolo, poligono, segmento, retta, semiretta, asse, altezza, bisettrice, mediana; invita ciascun alunno a fornire la propria definizione per ciascuno di essi; consulta un dizionario di matematica e legge la definizione di ciascuno dei termini precedentemente proposti, quindi invita ciascun alunno alla trascrizione delle definizioni corrette sulla rubrica personale. Le metodologie proposte sono il *brainstorming*, il *learning by doing*, il rubricato. Ciascuno studente ricopia i termini enunciati dal docente all'interno della propria rubrica rispettando l'ordine alfabetico e utilizzando il primo colore prescelto per la trascrizione dei termini; accoglie l'invito del docente e fornisce la propria definizione per ciascuno dei termini precedentemente trascritti; confronta le proprie definizioni e quelle fornite dagli altri alunni con quelle lette dal docente; trascrive l'eventuale definizione corretta nella propria rubrica.

	TERMINI	DEFINIZIONE	GRAFICA
A	Altezza	<i>S.f. da alto, dal latino altus, da cui anche "altitudine". Dimensione di una costruzione, di un rilievo, di un oggetto, in senso verticale, dal suo vertice alla base: l'altezza di una torre, di un albero, di una montagna. Posizione determinata di un punto sulla verticale: uccelli che volano a una certa altezza [...].</i>	
R	Retta	<i>S.f. 1872. Dal latino recta, participio passato di regere, "redigere". Vi fu un tempo in cui si definiva l'idea di retta come un filo perfettamente teso oppure come il cammino più breve fra due punti, giusto per citare due delle definizioni più popolari in quanto maggiormente evocative. In effetti ci vollero più di venticinque secoli per ammettere che queste non sono definizioni. Una retta è un ente ideale: non ha né larghezza né spessore e fra due suoi punti ve ne sono infiniti altri.</i>	
S	Segmento	<i>S.m. 1660. Dal latin segmentum, da secare, "tagliare". Pezzo, parte: "un segmento dell'autostrada era chiuso alla circolazione a causa di un incidente".</i>	
	Semiretta	<i>È l'insieme dei punti di una retta che seguono un punto della retta stessa.</i>	

Fase 3.

tempo: 120'

La rappresentazione grafica

Il docente, nell'aula multimediale, visualizza tramite LIM la rappresentazione grafica di ciascuno degli enti geometrici rappresentabili graficamente e precedentemente inseriti nella rubrica. Le metodologie proposte sono il *brainstorming*, il *learning by doing*, il rubricato, la didattica digitale. Lo studente ricopia nella propria rubrica ciascuna delle rappresentazioni grafiche visualizzate tramite LIM associandole all'ente geometrico corrispondente.



PUNTO



LINEA RETTA



LINEA CURVA



LINEA SPEZZATA

figura 1

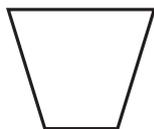


figura 2



figura 3

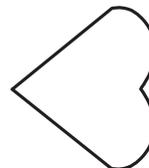


figura 4

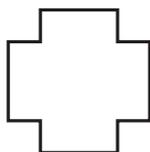


figura 5

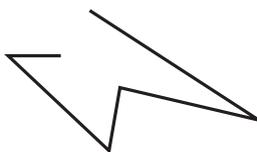
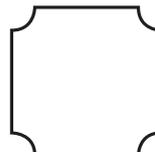


figura 6



il **nuovo** concorso a cattedra

Il presente volume si pone come utile strumento di studio per quanti si apprestano alla preparazione al concorso a cattedra per le classi il cui programma d'esame comprende la **Matematica**, e contiene sia le principali **conoscenze teoriche** necessarie per superare tutte le fasi della selezione concorsuale, che preziosi **spunti operativi** per l'ordinaria attività d'aula.

Il volume è strutturato in più parti. Nella **prima** sono inquadrati gli aspetti ordinamentali correlati all'insegnamento della disciplina così come emergono dalle Indicazioni nazionali anche nell'ambito delle prescrizioni europee e del sistema di rilevazione internazionale. Nella convinzione che il valore della progettazione e l'efficacia dell'azione didattica si misurano in relazione ai risultati ottenuti dai discenti, ovvero in rapporto al grado di competenze sviluppate dagli studenti, ampio spazio viene dedicato agli aspetti della mediazione didattica e delle competenze metodologiche necessarie per l'insegnamento. Nella **seconda parte** si affrontano i contenuti della disciplina nel modo più completo possibile, fornendo sia approcci formali e rigorosi, sia approcci più pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può aver affrontato. La trattazione è, di tanto in tanto, interrotta da note di vario genere che tendono a concretizzare aspetti formali o a riportare la matematica all'interno di questioni pratiche e reali. L'**ultima parte** del testo è infine incentrata sulla **pratica dell'attività d'aula** e contiene esempi di **Unità di Apprendimento** utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Il manuale è completato da ulteriori **materiali didattici**, **approfondimenti** e **risorse** di studio accessibili online dalla propria area riservata: in particolare, un'ampia appendice sulla **Storia del pensiero matematico** nonché ulteriori esempi di **Unità di Apprendimento**.

I servizi web sono disponibili per 12 mesi dall'attivazione del codice.

PER COMPLETARE LA PREPARAZIONE:

CC 1/1 • **LE AVVERTENZE GENERALI** • ISBN: 9788865845813

CC 4/12/2 • **ESERCIZI DI MATEMATICA E FISICA** • ISBN: 9788865842737

CC 4/12/3 • **DIDATTICA DELLA MATEMATICA** • ISBN: 9788865842713



www.edises.it
info@edises.it

 Per essere sempre aggiornato seguici su Facebook
facebook.com/ilconcorsoacattedra

Clicca su mi piace  per ricevere gli aggiornamenti.



€ 52,00

