

il **nuovo** concorso  
a cattedra

COMPRENDE  
ESTENSIONI  
ONLINE

# Matematica e Fisica

nella scuola secondaria  
di primo grado

Manuale per la preparazione alle prove scritte e orali

Classi di concorso:

**A28** Matematica e scienze | **A059** Scienze matematiche, chimiche,  
fisiche e naturali nella scuola secondaria di primo grado

Emiliano Barbuto

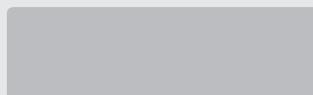






Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it** e accedere ai **servizi e contenuti riservati**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie



Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.

L'**accesso ai servizi riservati** ha la durata di **un anno** dall'attivazione del codice e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticati tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*



il **nuovo** concorso  
a cattedra

# Matematica e Fisica

nella scuola secondaria  
di primo grado

Manuale per la preparazione alle prove scritte e orali

a cura di **Emiliano Barbuto**



Il nuovo Concorso a Cattedra – Matematica e Fisica nella scuola secondaria di primo grado –  
II Edizione

Copyright © 2016, 2013, EdiSES S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2020 2019 2018 2017 2016

*Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata*

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,  
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

*Autori:*

Emiliano Barbuto

Daniela Decembrino (per le Unità di Apprendimento 1 e 2)

Mauro Carta (per le Unità di Apprendimento 3, 4 e 5)

*Progetto grafico:* ProMedia Studio di A. Leano – Napoli

*Fotocomposizione:* Oltrepagina – Verona

*Grafica di copertina:*  CURVILINE

*Redazione:* EdiSES – Napoli

*Stampato presso* Petruzzi S.r.l. – Via Venturelli 7/B – Città di Castello (PG)

*Per conto della* EdiSES – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 978 88 6584 621 6

[www.edises.it](http://www.edises.it)

[info@edises.it](mailto:info@edises.it)

---

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi all'indirizzo [redazione@edises.it](mailto:redazione@edises.it)

# Sommario

## Parte Prima La didattica disciplinare

Capitolo 1	La matematica nel quadro normativo europeo .....	3
Capitolo 2	Rilevazione degli apprendimenti e didattica della matematica .....	19
Capitolo 3	Software didattici .....	45

## Parte Seconda Matematica

Capitolo 1	Insiemi, relazioni, funzioni .....	79
Capitolo 2	Geometria euclidea e geometrie non euclidee .....	119
Capitolo 3	Insiemi numerici .....	199
Capitolo 4	Il metodo delle coordinate .....	285
Capitolo 5	Funzioni reali e calcolo numerico .....	407
Capitolo 6	Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile .....	453
Capitolo 7	Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica .....	609
Capitolo 8	Storia della matematica .....	

## Parte Terza Fisica

Capitolo 1	Le grandezze fisiche .....	709
Capitolo 2	Cinematica .....	719



Capitolo 3	Dinamica.....	733
Capitolo 4	Lavoro ed energia.....	749
Capitolo 5	Statica .....	757
Capitolo 6	Meccanica dei fluidi.....	763
Capitolo 7	Termologia e Termodinamica.....	775
Capitolo 8	Elettricità.....	799
Capitolo 9	Magnetismo.....	819
Capitolo 10	Le onde.....	829
Capitolo 11	Cenni di ottica, specchi e lenti.....	839
Capitolo 12	Cenni di fisica nucleare.....	847
Capitolo 13	Storia della fisica .....	

## Parte Quarta

### Esempi di Unità di Apprendimento

Premessa .....	855	
Unità di Apprendimento 1	Temperatura, calore e cambiamenti di stato.....	865
Unità di Apprendimento 2	Il suono e i fenomeni acustici.....	873

# Finalità e struttura dell'opera

Il presente lavoro è concepito come supporto per quanti si accingono ad affrontare le prove del concorso a cattedra, rappresentando un valido strumento di ausilio per tutti coloro che intendono intraprendere la professione docente. La complessità della scuola moderna ha imposto non poche riflessioni nella stesura del volume, dalle quali è risultata un'opera che intende contribuire a formare un docente che:

- sia in possesso dei contenuti della disciplina ad un livello spesso superiore a quello che gli viene richiesto dalla didattica in classe;
- sia un professionista della comunicazione, un individuo che ha maturato capacità empatiche ed un abile gestore del contesto classe.

La “scuola dei programmi” prescrittivi ed obbligatori, da dover terminare entro la fine dell'anno scolastico, anche a rischio di lasciare indietro qualche alunno più bisognoso di supporto, ha gradualmente lasciato il posto alla “scuola della programmazione” che ha tentato di adeguare al contesto classe, attraverso un continuo lavoro di feedback, l'attività di insegnamento e gli obiettivi da conseguire. Negli ultimi due decenni, alla “scuola della programmazione” è subentrata la “scuola dell'autonomia e della personalizzazione”.

In queste due espressioni è riassunto tutto il moderno approccio della didattica. L'autonomia scolastica, declinata in tutte le sue forme, permette a ciascuna scuola di creare un proprio curriculum da proporre alla sua utenza. Questo curriculum è il frutto dell'interazione della istituzione scolastica con il “territorio” e con tutti gli *stakeholder*, sicché ciascuna scuola diventa una cellula vitale nella realtà sociale ed economica del territorio.

Alle caratteristiche specifiche di ogni singola istituzione scolastica, si aggiungono gli stili cognitivi e le particolari inclinazioni di ogni singolo alunno. Ecco, quindi, che subentra la personalizzazione del percorso di apprendimento e la capacità del docente di adeguare la propria didattica non più al contesto classe, dove potrebbe essere recepita solo “in media” e non “singolarmente”, ma piuttosto al singolo alunno, quale “realtà” cognitiva specifica e irripetibile.

Perché la personalizzazione dell'apprendimento abbia luogo, il docente deve avvalersi di un'approfondita conoscenza dei contenuti che vuole proporre. In questo modo, egli riesce a declinarli con proprietà ed incisività, mettendo in rilievo tutti gli aspetti critici. Analogamente, il docente deve essere in grado di operare con padronanza e sicurezza usando le nuove tecnologie. Sono queste ultime che possono mettere in rilievo gli stili cognitivi degli alunni, la loro propensione a comprendere attraverso canali di comunicazione multimodale,



usando – oltre al manuale – simulazioni, immagini in movimento, narrazioni sonore, diagrammi. È opinione comune che, in futuro, il testo perderà la propria funzione predominante di veicolo per la trasmissione della conoscenza e sarà affiancato (anche se non sostituito), con pari dignità, da altri strumenti (suoni, immagini, simulazioni) con i quali gli studenti di oggi familiarizzano già.

L'attenzione si sposta quindi dalla pratica di insegnamento del docente al processo di apprendimento dello studente. Questo vuol dire che la didattica trasmissiva, fatta di una mole interminabile di nozioni che allo studente rischiano di apparire vuote di significati, occorre sostituire una didattica improntata alla maturazione delle competenze negli alunni. Questi ultimi devono cogliere l'utilità di ciò che studiano e riuscire a richiamarne il significato in un contesto reale, così da applicare le conoscenze di cui sono entrati in possesso.

Inutile dire che la didattica delle discipline matematiche e scientifiche risente particolarmente di queste criticità e potrebbe beneficiare oltremodo di un approccio multimodale nella dinamica di insegnamento ed apprendimento. Tali discipline devono far maturare nello studente quelle competenze fondamentali affinché egli diventi cittadino partecipe e cosciente della società di domani. Pertanto il docente deve sapersi allontanare dalla cattedra ed avvicinarsi ai banchi, assumendo anche il ruolo di tutor, ossia di professionista della formazione, di persona che coglie i bisogni reali degli alunni e declina la propria disciplina in base a tali necessità.

In particolare, la matematica deve diventare la “matematica dell'utile”, affinché chi si avvicina ad essa possa comprenderne l'importanza in contesti pratici e reali che certamente contribuiscono a renderla più affascinante agli occhi di chi la studia.

Le ultime indagini internazionali (OCSE-PISA, IEA-TIMMS) e le prove del servizio nazionale di valutazione a cura dell'INVALSI sono orientate proprio a mettere in evidenza questi aspetti della disciplina. Probabilmente gli scarsi risultati conseguiti dagli studenti italiani nelle precedenti indagini internazionali su tali materie hanno messo in evidenza la scarsa diffusione di tale approccio nella scuola italiana. Come controprova, l'evidente miglioramento dei risultati nell'ultima indagine OCSE-PISA, determinato in buona parte dal miglioramento dei risultati nelle regioni meridionali che in precedenza avevano segnato il passo, è frutto di una serie di interventi sistemici che il Ministero, gli enti di ricerca e le istituzioni scolastiche hanno posto in essere negli ultimi anni.

Il volume è strutturato in quattro parti. La **prima parte** tratta gli **aspetti ordinamentali** correlati all'insegnamento della Matematica, così come emergono dalle Indicazioni Nazionali anche nell'ambito delle prescrizioni europee e del sistema di rilevazione internazionale. Vengono inoltre presentate le **nuove tecnologie per la didattica** (software specifici per la matematica: geometria dinamica, calcolo simbolico). La **seconda parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai di-

versi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La **terza parte**, dedicata alla **Fisica**, si occupa dei contenuti specifici della materia nel modo più completo possibile.

La **quarta parte** del testo è, infine, incentrata sulla **pratica dell'attività didattica** e contiene esempi di **Unità di Apprendimento** e di organizzazione di attività di classe utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Materiali didattici integrativi e approfondimenti saranno resi disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nel frontespizio del volume.

Altri aggiornamenti sulle procedure concorsuali saranno disponibili sui nostri profili social

**Facebook.com/ilconcorsoacattedra**

Clicca su mi piace (**Facebook**) per ricevere gli aggiornamenti  
[www.concorsoacattedra.it](http://www.concorsoacattedra.it)



# Indice

## Parte Prima La didattica disciplinare

### Capitolo 1 - La matematica nel quadro normativo europeo

1.1	Le competenze chiave per l'apprendimento permanente.....	3
1.1.1	La strategia di Lisbona e l'apprendimento permanente.....	3
1.1.2	Le competenze chiave per l'apprendimento permanente.....	4
1.1.3	La matematica nelle otto competenze.....	6
1.2	Le Indicazioni per il curriculum del primo ciclo di istruzione.....	7
1.2.1	Gli aspetti innovativi delle Indicazioni per il curriculum.....	7
1.2.2	La matematica nelle Indicazioni per il curriculum.....	9
1.2.3	Le nuove Indicazioni per il curriculum 2012.....	12
1.3	Le competenze chiave di cittadinanza e l'asse matematico.....	13
1.3.1	Gli assi culturali e le competenze chiave per la cittadinanza.....	13
1.3.2	L'asse matematico.....	15
1.3.3	Il quadro delle competenze comuni a tutti i percorsi di istruzione.....	17

### Capitolo 2 - Rilevazione degli apprendimenti e didattica della matematica

2.1	Le rilevazioni Invalsi.....	19
2.1.1	L'Invalsi e la rilevazione degli apprendimenti nella scuola secondaria.....	19
2.1.2	La prova di matematica.....	20
2.1.3	I contenuti matematici.....	21
2.1.4	I processi.....	24
2.1.5	Le prove Invalsi: come sono strutturate e cosa rilevano.....	25
2.2	L'indagine OCSE-PISA.....	28
2.2.1	Aspetti generali dell'indagine.....	28
2.2.2	Competenze.....	28
2.2.3	Contenuti, processi, capacità soggiacenti e contesto.....	31
2.2.4	Analisi delle prove OCSE-PISA.....	33
2.3	La didattica per competenze in matematica.....	35
2.3.1	I risultati della scuola italiana nelle prove OCSE-PISA.....	35
2.3.2	Le cause dei risultati poco soddisfacenti dell'Italia in matematica.....	36
2.3.3	Approccio formale e teorico alla disciplina.....	38
2.3.4	Approccio laboratoriale e contestualizzato alla disciplina.....	41
2.4	L'indagine IEA-TIMSS.....	42



### Capitolo 3 - Software didattici

3.1	Software di Geometria Dinamica .....	46
3.1.1	Panoramica sui software di geometria dinamica.....	46
3.1.2	Geogebra – funzionalità di carattere generale.....	47
3.1.3	Costruzione e verifica delle proprietà del baricentro di un triangolo .....	49
3.1.4	Costruzione e verifica delle proprietà dell’ortocentro di un triangolo .....	54
3.1.5	Costruzione di una parabola i cui parametri variano dinamicamente.....	57
3.1.6	Il significato geometrico della derivata di una funzione in un punto.....	60
3.2	I software di calcolo simbolico .....	62
3.2.1	Panoramica sui software di calcolo simbolico .....	62
3.2.2	wxMaxima – funzionalità di carattere generale .....	64
3.2.3	Calcoli algebrici.....	65
3.2.4	Calcolo letterale .....	67
3.2.5	Risoluzione di equazioni e sistemi di equazioni.....	70
3.2.6	Calcoli di analisi matematica e rappresentazione delle funzioni.....	72

## Parte Seconda Matematica

### Capitolo 1 - Insiemi, relazioni, funzioni

1.1	Concetti fondamentali .....	79
1.2	Relazione di inclusione.....	80
1.3	Operazioni tra insiemi .....	81
1.4	Insieme delle parti .....	84
1.5	Coppia ordinata e prodotto cartesiano.....	84
1.6	Relazione binaria.....	85
1.7	Relazioni di equivalenza .....	87
1.8	Relazioni d’ordine largo .....	88
1.9	Relazioni d’ordine stretto.....	89
1.10	Funzioni.....	89
1.11	Funzioni suriettive, iniettive e biiettive .....	91
1.12	Funzioni composte.....	93
1.13	Funzione inversa e identità.....	93
1.14	Cardinalità di un insieme .....	94
1.14.1	Insiemi equipotenti e numeri cardinali.....	94
1.14.2	Operazioni tra numeri cardinali .....	95
1.14.3	Insiemi finiti e insiemi numerabili.....	96
1.14.4	Insiemi numerici numerabili.....	98

1.14.5	Insiemi numerici non numerabili.....	101
1.14.6	L'ipotesi del continuo.....	105
1.15	Calcolo combinatorio .....	106
1.15.1	Principio di moltiplicazione .....	106
1.15.2	Fattoriale di un numero .....	107
1.15.3	Disposizioni con ripetizione .....	107
1.15.4	Disposizioni .....	108
1.15.5	Permutazioni .....	109
1.15.6	Permutazioni con ripetizione .....	109
1.15.7	Combinazioni .....	110
1.15.8	Combinazioni con ripetizione.....	111
1.15.9	Il coefficiente binomiale.....	111
1.15.10	Formula del binomio di Newton.....	112
1.15.11	Somma di coefficienti binomiali .....	113
1.15.12	Il triangolo di Tartaglia .....	113
1.16	Il metodo assiomatico .....	115
1.16.1	Le teorie matematiche .....	115
1.16.2	La definizione dei termini .....	115
1.16.3	Distinzione tra termine e concetto: teorie realistiche e teorie formali ..	116

## Capitolo 2 - Geometria euclidea e geometrie non euclidee

2.1	Gli <i>Elementi</i> di Euclide .....	119
2.1.1	La struttura degli <i>Elementi</i> di Euclide .....	119
2.1.2	Definizioni, assiomi e postulati nel primo libro degli <i>Elementi</i> .....	119
2.1.3	Il quinto postulato di Euclide.....	122
2.1.4	Il quinto postulato e la struttura del primo libro degli <i>Elementi</i> .....	123
2.2	Trasformazioni affini tra piani e affinità nel piano .....	127
2.2.1	Trasformazioni affini.....	127
2.2.2	Affinità .....	131
2.2.3	Proprietà delle affinità.....	132
2.2.4	Punti uniti di una trasformazione .....	136
2.2.5	Le similitudini e il gruppo Euclideo .....	139
2.2.6	Particolari similitudini: omotetie .....	144
2.2.7	Isometrie.....	147
2.2.8	Isometrie dirette.....	148
2.2.9	Isometrie inverse .....	156
2.2.10	Riepilogo.....	160
2.3	L'idea della geometria proiettiva .....	162
2.3.1	La prospettiva .....	162
2.3.2	La retta proiettiva.....	162
2.3.3	Il piano proiettivo .....	165
2.3.4	Coordinate omogenee nel piano proiettivo .....	169
2.3.5	Spazio proiettivo e coordinate omogenee nello spazio .....	171
2.3.6	Definizione operativa di spazio proiettivo .....	171
2.4	Operare con le coordinate omogenee.....	173
2.4.1	Rette nel piano .....	173

2.4.2	Coniche in coordinate omogenee .....	175
2.5	Le proiettività .....	177
2.5.1	Proiettività sulla retta proiettiva .....	177
2.5.2	Punti uniti .....	178
2.5.3	Il birapporto .....	181
2.5.4	Proiettività sul piano .....	183
2.5.5	Punti uniti e rette unite .....	186
2.5.6	Studio della prospettiva .....	192

### Capitolo 3 - Insiemi numerici

3.1	Leggi di composizione interne ed esterne .....	199
3.2	L'insieme dei numeri naturali .....	199
3.2.1	Assiomi di Peano .....	200
3.2.2	Addizione di naturali .....	201
3.2.3	Moltiplicazione di naturali .....	203
3.2.4	Relazione d'ordine nei naturali .....	204
3.2.5	La divisione euclidea .....	205
3.2.6	La potenza .....	207
3.3	Rappresentazione dei numeri naturali .....	207
3.3.1	I primi modi di rappresentare i numeri naturali .....	207
3.3.2	Il sistema di numerazione dell'antica Roma .....	208
3.3.3	Il sistema di numerazione decimale .....	209
3.3.4	Il sistema di numerazione binario .....	210
3.3.5	Conversioni .....	211
3.4	L'insieme dei numeri interi .....	212
3.5	I numeri razionali .....	216
3.5.1	Definizione dell'insieme dei numeri razionali .....	216
3.5.2	Operazioni nell'insieme dei numeri razionali .....	217
3.5.3	La relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali .....	218
3.5.4	Scrittura posizionale dei numeri razionali .....	219
3.6	Le problematiche che portano alla nascita dei numeri reali .....	221
3.6.1	La scrittura posizionale .....	221
3.6.2	L'estrazione di radice .....	221
3.6.3	Le grandezze incommensurabili .....	221
3.6.4	Le soluzioni di equazioni a coefficienti interi .....	223
3.6.5	La quadratura del cerchio .....	224
3.7	La costruzione dell'insieme dei numeri reali .....	224
3.7.1	Primo approccio: la notazione posizionale .....	224
3.7.2	Secondo approccio: i tagli di Dedekind .....	224
3.7.3	Terzo approccio: le successioni di numeri razionali .....	228
3.8	Numeri irrazionali, numeri algebrici e numeri trascendenti .....	228
3.8.1	I numeri irrazionali .....	228
3.8.2	Numeri che sono zeri di un polinomio: i numeri algebrici .....	229
3.8.3	Numeri che non sono zeri di un polinomio: i numeri trascendenti .....	230
3.9	Le strutture algebriche .....	231
3.9.1	Definizione di struttura algebrica .....	231

3.9.2	Proprietà associativa e semigrupperi.....	231
3.9.3	Esistenza dell'elemento neutro e monoidi.....	232
3.10	I gruppi.....	233
3.10.1	Esistenza dell'elemento inverso.....	233
3.10.2	Definizione di gruppo.....	233
3.10.3	Proprietà commutativa e gruppi abeliani.....	234
3.10.4	Gruppi finiti, infiniti e finitamente generati, insiemi di generatori.....	235
3.11	Aritmetica modulare.....	236
3.11.1	Congruenza modulo $n$ .....	236
3.11.2	Teoremi dell'aritmetica modulare.....	236
3.11.3	Classi di congruenza modulo $n$ e insieme quoziente.....	237
3.11.4	Gruppi definiti mediante la relazione di congruenza.....	238
3.12	Gruppi ciclici.....	240
3.12.1	Caratteristiche di un gruppo ciclico e periodo degli elementi.....	240
3.12.2	Gruppi additivi.....	241
3.12.3	Gruppi moltiplicativi.....	241
3.13	Tavole di Cayley.....	243
3.14	Prodotto di gruppi.....	244
3.15	I sottogruppi e i laterali destro e sinistro.....	245
3.15.1	Definizione di sottogruppo.....	245
3.15.2	Classi laterali.....	245
3.15.3	Sottogruppi normali.....	247
3.16	Gruppi risolubili.....	251
3.17	I gruppi simmetrici.....	252
3.17.1	Permutazioni.....	252
3.17.2	Il gruppo simmetrico delle permutazioni.....	253
3.17.3	Cicli e trasposizioni.....	254
3.17.4	Le permutazioni pari e il gruppo alterno.....	258
3.17.5	Risolubilità dei gruppi simmetrici $S_2$ , $S_3$ e $S_4$ .....	259
3.17.6	Il gruppo simmetrico $S_5$ .....	261
3.18	Gruppo diedrale.....	262
3.18.1	Definizione.....	262
3.18.2	Interpretazione geometrica.....	263
3.19	Isomorfismo tra gruppi e gruppi isomorfi.....	268
3.20	Anelli.....	272
3.20.1	Definizione.....	272
3.20.2	Anello dei polinomi.....	273
3.21	Corpi e campi.....	275
3.21.1	Definizioni.....	275
3.21.2	Estensione di un campo.....	276
3.21.3	Campo di spezzamento (o campo di riducibilità completa).....	278
3.22	Teoria di Galois.....	280
3.22.1	L'idea.....	280
3.22.2	Gruppo di Galois.....	281
3.22.3	Risolubilità per radicali di un'equazione di grado $n$ .....	283

## Capitolo 4 - Il metodo delle coordinate

4.1	Gli spazi vettoriali .....	285
4.1.1	Definizione di spazio vettoriale .....	285
4.1.2	Sottospazio.....	288
4.1.3	Combinazione lineare di vettori .....	289
4.1.4	Dipendenza e indipendenza lineare.....	290
4.1.5	Generatori e basi.....	291
4.1.6	Dimensione di uno spazio vettoriale.....	293
4.2	Applicazioni lineari.....	294
4.2.1	Definizione di applicazione lineare .....	294
4.2.2	Composizione di applicazioni lineari .....	295
4.2.3	Un esempio di spazio vettoriale: lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari.....	295
4.2.4	Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare .....	296
4.2.5	Particolari applicazioni lineari .....	297
4.3	Matrici.....	298
4.3.1	Definizioni .....	298
4.3.2	Lo spazio vettoriale delle matrici .....	299
4.3.3	Moltiplicazione tra matrici .....	302
4.3.4	Corrispondenza tra matrici ed applicazioni lineari .....	307
4.3.5	Isomorfismo tra matrici e applicazioni lineari .....	311
4.3.6	Matrici associate ad endorfismi, matrici simili .....	311
4.3.7	Composizione di applicazioni lineari e matrici.....	312
4.4	Determinanti .....	312
4.4.1	Definizione e calcolo del determinante di una matrice .....	312
4.4.2	Proprietà del determinante di una matrice.....	318
4.4.3	Rango di una matrice.....	321
4.5	Sistemi lineari .....	325
4.5.1	Definizione di sistema lineare .....	325
4.5.2	Sistemi lineari compatibili .....	326
4.5.3	Soluzioni di sistemi lineari quadrati .....	327
4.5.4	Soluzioni di sistemi lineari generici.....	328
4.5.5	Procedura per la risoluzione di un generico sistema .....	329
4.5.6	Matrice inversa .....	335
4.5.7	Sistemi lineari omogenei.....	338
4.6	Diagonalizzazione di matrici .....	341
4.6.1	Autovettore, autovalore e autospazio.....	341
4.6.2	Matrici diagonalizzabili.....	342
4.6.3	Algoritmo per diagonalizzare le matrici .....	343
4.6.4	Polinomi e condizioni di diagonalizzazione.....	345
4.6.5	Segnatura di una matrice .....	345
4.7	Punti, rette e vettori nello spazio euclideo .....	351
4.8	Geometria analitica nel piano .....	353
4.8.1	Punti nel piano cartesiano.....	353
4.8.2	Vettori nel piano cartesiano .....	354
4.8.3	Le curve algebriche.....	357

4.9	Curve algebriche di primo grado: le rette .....	358
4.9.1	Equazione di una retta in forma parametrica .....	358
4.9.2	Equazione di una retta in forma implicita .....	359
4.9.3	Intersezione di due rette .....	359
4.9.4	Rette: casi particolari .....	362
4.9.5	Equazione della retta in forma segmentaria .....	363
4.9.6	Equazione della retta in forma esplicita .....	364
4.9.7	Fasci di rette .....	365
4.9.8	Alcune relazioni utili sulla retta .....	367
4.10	Curve algebriche di secondo grado: le coniche .....	369
4.10.1	Classificazione di una conica .....	369
4.10.2	Riduzione a forma normale di una conica .....	372
4.10.3	Le coniche come sezioni di un cono a due falde .....	378
4.11	Geometria analitica nello spazio .....	380
4.11.1	Punti nello spazio .....	380
4.11.2	Vettori nello spazio .....	381
4.12	Superfici algebriche di primo grado: i piani .....	385
4.12.1	Equazione parametrica del piano .....	385
4.12.2	Equazione generale del piano .....	385
4.12.3	Equazioni di piani particolari .....	389
4.12.4	Intersezione di due piani e condizione di parallelismo .....	390
4.13	Le rette nello spazio .....	391
4.13.1	Equazioni parametriche della retta .....	391
4.13.2	Equazioni normali della retta .....	392
4.13.3	Equazioni generali ed equazioni ridotte della retta .....	392
4.13.4	Intersezione tra retta e piano (rette e piani paralleli) .....	396
4.13.5	Rette parallele e perpendicolari .....	397
4.13.6	Piani paralleli e perpendicolari .....	399
4.13.7	Rette e piani perpendicolari .....	399
4.13.8	Distanza di un punto da un piano .....	400
4.14	Superfici algebriche di secondo ordine: le quadriche .....	400
4.14.1	Classificazione di una quadrica .....	400

## Capitolo 5 - Funzioni reali e calcolo numerico

5.1	Intervalli e intorni .....	407
5.1.1	Tipologie di intervalli .....	407
5.1.2	Intorni e intorni circolari .....	409
5.2	Funzioni reali di variabili reali .....	409
5.2.1	Generalità .....	409
5.2.2	Campo di esistenza ed immagine .....	411
5.2.3	Funzioni composte .....	412
5.2.4	Funzioni invertibili .....	412
5.2.5	Funzioni monotone .....	413
5.2.6	Funzioni pari e dispari .....	416
5.2.7	Funzioni periodiche .....	417
5.2.8	Funzioni elementari .....	418

5.2.9	Determinazione del campo di esistenza delle funzioni reali .....	425
5.3	Errori nel calcolo numerico .....	427
5.3.1	Premessa .....	427
5.3.2	Rappresentazione esponenziale dei numeri reali.....	427
5.3.3	I numeri in virgola mobile.....	429
5.3.4	Perdita di informazione nel calcolo con numeri floating point .....	431
5.3.5	Arrotondare e troncatura.....	433
5.3.6	Errore assoluto ed errore relativo .....	435
5.3.7	Errore assoluto limite ed errore relativo limite.....	437
5.3.8	Cifre decimali corrette e cifre significative corrette .....	441
5.4	Propagazione dell'errore.....	442
5.4.1	Alcune regole basilari di propagazione dell'errore .....	442
5.4.2	Problema, algoritmo ed elaboratore.....	444
5.4.3	Condizionamento di un problema .....	445
5.4.4	Stabilità di un algoritmo .....	449

**Capitolo 6 - Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile**

6.1	Limite di una funzione .....	453
6.1.1	Punti di accumulazione .....	453
6.1.2	Definizione di limite .....	454
6.1.3	Limiti per funzioni divergenti in un punto.....	455
6.1.4	Verifica del limite .....	457
6.1.5	Limite destro e limite sinistro.....	460
6.1.6	Teoremi sui limiti .....	462
6.1.7	Operazioni sui limiti .....	464
6.1.8	Generalizzare le operazioni sui limiti .....	465
6.1.9	Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli.....	467
6.1.10	Calcolo di limiti.....	470
6.2	Successioni e limiti di successioni .....	474
6.2.1	Definizione e generalità.....	474
6.2.2	Limite di una successione di numeri reali.....	477
6.3	Continuità delle funzioni reali .....	478
6.3.1	Funzione continua .....	478
6.3.2	Funzione uniformemente continua.....	483
6.3.3	Punti di discontinuità .....	484
6.3.4	Individuare i punti di discontinuità di una funzione .....	486
6.4	Derivata.....	487
6.4.1	Rapporto incrementale.....	487
6.4.2	Definizione di derivata e derivabilità.....	488
6.4.3	Derivata destra e sinistra.....	489
6.4.4	Continuità e derivabilità .....	489
6.4.5	Dal rapporto incrementale alla derivata.....	490
6.4.6	Interpretazione geometrica della derivata .....	492
6.4.7	Retta tangente ad una funzione in un punto.....	494
6.4.8	Regole di derivazione.....	495

6.4.9	Calcolo di derivate .....	495
6.4.10	Punti di discontinuità della derivata .....	498
6.4.11	Derivate di ordine superiore .....	501
6.4.12	Differenziale .....	502
6.5	Calcolo differenziale e studio di una funzione di variabile reale.....	503
6.5.1	Teorema di Rolle, Cauchy e Lagrange.....	503
6.5.2	Condizioni sulla monotonia di una funzione .....	507
6.5.3	Massimi e minimi assoluti di una funzione .....	508
6.5.4	Estremo inferiore ed estremo superiore .....	508
6.5.5	Massimo e minimo relativo.....	510
6.5.6	Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo e assoluto .....	511
6.5.7	Condizioni su concavità e punti di flesso .....	515
6.5.8	I teoremi di l'Hopital .....	517
6.5.9	Asintoti di una funzione .....	520
6.5.10	Studio del grafico di una funzione .....	522
6.6	Il problema della misura.....	530
6.6.1	Introduzione.....	530
6.6.2	La misura di Peano-Jordan .....	530
6.6.3	La misura di Vitali-Lebesgue .....	536
6.7	Integrazione indefinita .....	538
6.7.1	Definizioni .....	538
6.7.2	Regole di integrazione .....	540
6.7.3	Metodi risolutivi per integrali di frazioni algebriche.....	546
6.8	Integrazione definita.....	551
6.8.1	Somma inferiore e somma superiore .....	551
6.8.2	Dalle somme all'integrale di Riemann .....	553
6.8.3	Le somme di Cauchy-Riemann .....	554
6.8.4	Funzioni integrabili.....	556
6.8.5	Proprietà degli integrali definiti .....	557
6.8.6	Teoremi sull'integrazione definita.....	558
6.9	Integrali impropri .....	563
6.9.1	Caso di un intervallo semi-aperto .....	563
6.9.2	Caso di un intervallo aperto .....	564
6.9.3	Caso generale: funzione generalmente continua su un intervallo limitato o illimitato .....	565
6.10	Calcolo di volumi di solidi di rotazione .....	566
6.11	Lunghezza di una curva ed area della superficie di rotazione.....	568
6.12	Serie numeriche .....	571
6.12.1	Definizioni .....	571
6.12.2	Serie a termini positivi, a termini di segno alterno e a termini qualunque .....	573
6.12.3	La serie geometrica .....	574
6.12.4	Resto di una serie .....	575
6.12.5	Teoremi generali sul carattere delle serie .....	577
6.13	Criteri di convergenza delle serie a termini positivi .....	578
6.13.1	Premessa .....	578
6.13.2	Criterio del confronto con l'integrale (Cauchy) .....	578

6.13.3	La serie di Dirichlet e la serie armonica .....	579
6.13.4	Criterio del confronto (o di Gauss) .....	580
6.13.5	Secondo criterio del confronto .....	581
6.13.6	Criterio del rapporto (o di D'Alembert) .....	582
6.13.7	Criterio della radice (o di Cauchy) .....	583
6.14	Criteri di convergenza delle serie a termini alterni e qualunque .....	584
6.14.1	Criterio di Leibnitz.....	584
6.14.2	La convergenza assoluta .....	585
6.14.3	Criteri di Cauchy e D'Alembert per serie a termini a segni alterni o qualunque .....	586
6.15	Sviluppo in serie di funzioni .....	587
6.15.1	Le serie di funzioni .....	587
6.15.2	Le serie di potenze .....	589
6.15.3	La serie di Mac Laurin .....	591
6.15.4	Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari.....	593
6.15.5	La formula di Eulero.....	596
6.15.6	La serie di Taylor .....	597
6.15.7	Applicazioni della serie di Taylor .....	598
6.15.8	La serie di Fourier .....	604

## Capitolo 7 - Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica

7.1	Definire la probabilità.....	609
7.1.1	Esperimento, insieme universo ed eventi.....	609
7.1.2	Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi .....	610
7.1.3	Definizione classica della probabilità.....	611
7.1.4	Definizione frequentista (o statistica) della probabilità .....	616
7.1.5	Definizione soggettiva di probabilità (o probabilità su scommessa) .....	621
7.1.6	Definizione assiomatica di probabilità.....	624
7.2	Teoremi fondamentali della teoria della probabilità.....	626
7.2.1	Probabilità dell'evento somma e probabilità dell'evento prodotto .....	626
7.2.2	Probabilità condizionata e probabilità composta .....	627
7.2.3	Indipendenza stocastica.....	630
7.2.4	Formula della probabilità totale.....	632
7.2.5	Teorema di Bayes .....	634
7.3	Fasi e strumenti dell'indagine statistica .....	637
7.3.1	Popolazioni, caratteri e modalità .....	637
7.3.2	Caratteri quantitativi e qualitativi.....	638
7.3.3	Intensità, frequenze assolute e relative .....	641
7.3.4	Tabelle e distribuzioni.....	644
7.3.5	Grafici .....	645
7.3.6	Grafici per caratteri qualitativi .....	646
7.3.7	Grafici per caratteri quantitativi discreti.....	650
7.3.8	Grafici per caratteri quantitativi continui.....	652
7.3.9	Le fasi di una indagine statistica .....	655

7.3.10	Analisi statistica univariata.....	657
7.4	Indici di posizione.....	658
7.4.1	La media aritmetica.....	659
7.4.2	La media geometrica.....	662
7.4.3	La media armonica.....	664
7.4.4	La media quadratica.....	666
7.4.5	Relazione tra le medie algebriche.....	667
7.4.6	La moda.....	667
7.4.7	La mediana.....	669
7.4.8	I quantili.....	673
7.5	Indici di variabilità.....	674
7.5.1	Campo di variabilità e differenze interquantili.....	675
7.5.2	Scarto semplice medio.....	675
7.5.3	Devianza.....	677
7.5.4	Varianza e scarto quadratico medio.....	677
7.5.5	Indici di dispersione relativi.....	680
7.5.6	Le differenze medie.....	681
7.5.7	La concentrazione.....	684
7.6	Indici di forma.....	691
7.6.1	Asimmetria.....	691
7.6.2	Curtosi.....	692
7.7	Rapporti statistici.....	694
7.7.1	Tipologie di rapporti statistici.....	694
7.7.2	I numeri indici.....	700
7.7.3	I numeri indici complessi.....	705

Capitolo 8 - Storia della matematica.....	
---	--

## Parte Terza

### Fisica

#### Capitolo 1 - Le grandezze fisiche

1.1	Sistemi di unità di misura.....	709
1.2	Grandezze scalari e grandezze vettoriali.....	712
1.3	Scomposizione di un vettore.....	713
1.4	Algebra dei vettori.....	714
1.5	Prodotti vettoriali.....	715
1.6	Proprietà delle operazioni tra vettori.....	717

#### Capitolo 2 - Cinematica

2.1	Posizione e traiettoria.....	719
2.2	Vettore spostamento.....	720



2.3	Velocità .....	720
2.4	Accelerazione .....	721
2.5	Moto rettilineo uniforme.....	722
2.6	Moto uniformemente accelerato .....	723
2.7	Accelerazione di gravità e caduta libera dei gravi.....	724
2.8	Moto di un proiettile.....	726
2.9	Moto circolare uniforme .....	729
2.10	Moto curvilineo non uniforme.....	730
2.11	Moto armonico.....	731

### Capitolo 3 - Dinamica

3.1	Prima legge della dinamica (o principio di inerzia).....	733
3.2	Seconda legge della dinamica .....	733
3.3	Forza.....	734
3.4	Massa .....	734
3.5	Forza peso .....	734
3.6	Terza legge della dinamica (o principio di azione e reazione) .....	735
3.7	Esempi di problemi dinamici .....	736
3.7.1	Moto di caduta di un grave.....	736
3.7.2	Moto lungo di un piano inclinato.....	736
3.7.3	Moto di un corpo sotto l'azione di una forza elastica: il moto armonico.....	738
3.7.4	Moto di un pendolo .....	739
3.7.5	Moto di un corpo sotto l'azione di una forza centripeta.....	741
3.8	Quantità di moto .....	741
3.9	Impulso di una forza e teorema dell'impulso .....	742
3.10	Conservazione della quantità di moto .....	742
3.11	Leggi di Keplero.....	743
3.11.1	Prima legge (legge delle orbite) .....	743
3.11.2	Seconda legge (legge delle aree) .....	743
3.11.3	Terza legge (legge dei periodi) .....	744
3.12	Legge di gravitazione universale .....	745
3.13	Campo gravitazionale.....	746
3.14	Massa inerziale e massa gravitazionale.....	746
3.15	Forze di attrito .....	746
3.16	Forze resistenti .....	748

### Capitolo 4 - Lavoro ed energia

4.1	Lavoro .....	749
4.2	Potenza.....	749
4.3	Lavoro della forza peso .....	750
4.4	Campo conservativo .....	751
4.5	Energia potenziale .....	752
4.6	Energia cinetica.....	752
4.7	Teorema dell'energia cinetica.....	752

4.8	Principio di conservazione dell'energia meccanica.....	753
4.9	Gli urti.....	755

### Capitolo 5 - Statica

5.1	Corpo rigido.....	757
5.2	Momento di una forza.....	757
5.3	Coppia di forze.....	758
5.4	Baricentro.....	759
5.5	Condizioni di equilibrio.....	760
5.6	Tipi di equilibrio.....	760
5.7	Leve e guadagno meccanico.....	761

### Capitolo 6 - Meccanica dei fluidi

6.1	Stati di aggregazione della materia.....	763
6.2	Densità.....	763
6.3	Peso specifico.....	764
6.4	Pressione.....	764
6.5	Pressione nei fluidi.....	765
6.6	Legge di Pascal.....	766
6.7	Legge di Stevino.....	766
6.8	Principio di Archimede.....	767
6.9	Principio dei vasi comunicanti.....	768
6.10	Fluidi in movimento.....	769
6.11	Equazione di continuità.....	769
6.12	Teorema di Torricelli.....	770
6.13	Teorema di Bernoulli.....	770
6.14	Fluido reale.....	773
6.15	Fenomeni di superficie.....	774

### Capitolo 7 - Termologia e Termodinamica

7.1	La temperatura.....	775
7.2	Principio zero.....	775
7.3	Termometro a mercurio.....	776
7.4	Scala Celsius (°C).....	776
7.5	Scala Fahrenheit (°F).....	776
7.6	Scala Kelvin.....	776
7.7	Dilatazione termica di solidi e liquidi.....	777
7.8	Dilatazione lineare.....	777
7.9	Dilatazione cubica.....	778
7.10	Leggi dei gas perfetti.....	778
	7.10.1 Prima legge di Gay-Lussac.....	778
	7.10.2 Seconda legge di Gay-Lussac.....	779
	7.10.3 Legge di Boyle.....	780
7.11	Equazione di stato dei gas perfetti.....	781
7.12	Mole.....	781

7.13	Legge di Dalton .....	782
7.14	Cenni di teoria cinetica dei gas .....	782
7.15	Gas reali .....	784
7.16	Il calore .....	784
7.17	Capacità termica, calore specifico e capacità termica molare.....	785
7.18	Calorimetro delle mescolanze .....	786
7.19	Il trasporto di calore .....	786
7.20	Passaggi di stato .....	788
7.20.1	La fusione .....	788
7.20.2	La solidificazione.....	789
7.20.3	Evaporazione .....	789
7.20.4	Ebollizione.....	789
7.20.5	La liquefazione dei gas .....	790
7.20.6	La sublimazione e il brinamento .....	791
7.21	Scambi di energia tra un sistema termodinamico e l'ambiente esterno .....	791
7.22	Primo principio della termodinamica .....	791
7.23	Lavoro in una trasformazione isobara .....	792
7.24	Trasformazioni non isobare.....	792
7.24.1	Trasformazione isocora.....	793
7.24.2	Trasformazione isoterma .....	793
7.24.3	Trasformazione adiabatica.....	793
7.25	Trasformazioni reversibili e irreversibili .....	794
7.26	Macchine termiche e rendimento .....	794
7.27	Ciclo di Carnot .....	795
7.28	Ciclo frigorifero.....	796
7.29	Entropia .....	796
7.30	Secondo principio della termodinamica .....	797

## Capitolo 8 - Elettricità

8.1	Elettrizzazione .....	799
8.2	Carica elettrica.....	799
8.3	Principio di conservazione della carica elettrica.....	799
8.4	Conduttori, isolanti e semiconduttori .....	799
8.5	Induzione elettrostatica .....	800
8.6	Legge di Coulomb.....	800
8.7	Campo elettrico.....	801
8.8	Campo elettrico generato da una carica puntiforme .....	802
8.9	Linee di forza del campo elettrico .....	802
8.10	Carattere conservativo del campo elettrostatico .....	803
8.11	Energia potenziale elettrica.....	803
8.12	Potenziale elettrico.....	804
8.13	Differenza di potenziale elettrico e lavoro delle forze elettriche.....	804
8.14	L'elettronvolt .....	805
8.15	Superfici equipotenziali.....	805
8.16	Flusso del vettore campo elettrico .....	806

8.17	Teorema di Gauss .....	806
8.18	Capacità elettrica.....	807
8.19	Il condensatore e la capacità del condensatore .....	807
8.20	Collegamento in serie tra condensatori .....	808
8.21	Collegamento in parallelo tra condensatori.....	809
8.22	Lavoro per caricare un condensatore ed energia accumulata in un condensatore .....	810
8.23	Corrente elettrica .....	810
8.24	Legge di Ohm.....	811
8.25	Effetto Joule.....	812
8.26	Generatore elettrico, pila, batteria.....	813
8.27	Circuito elettrico .....	813
8.28	Amperometro (o galvanometro) .....	814
8.29	Voltmetro .....	814
8.30	Collegamento in serie tra resistenze .....	814
8.31	Collegamento in parallelo tra resistenze .....	815
8.32	Leggi di Kirchhoff.....	816
8.33	Corrente elettrica nei liquidi.....	816
8.34	Corrente elettrica nei gas .....	817

## Capitolo 9 - Magnetismo

9.1	Magnete .....	819
9.2	Campo magnetico .....	820
9.3	Campi magnetici generati da correnti elettriche.....	821
9.4	Forza di Lorentz .....	823
9.5	Interazione campo magnetico-corrente elettrica.....	824
9.6	Interazione tra fili percorsi da corrente .....	824
9.7	Proprietà magnetiche della materia .....	825
9.8	Elettromagnetismo.....	826
9.9	Generatore di corrente alternata .....	826

## Capitolo 10 - Le onde

10.1	Definizione e classificazione.....	829
10.2	Grandezze caratteristiche di un'onda.....	829
10.3	La funzione d'onda.....	830
10.4	Fronti d'onda.....	831
10.5	Interferenza e principio di sovrapposizione.....	832
10.6	Onde stazionarie .....	833
10.7	Intensità dell'onda .....	833
10.8	Riflessione e rifrazione .....	834
10.9	Diffrazione .....	835
10.10	Effetto Doppler .....	835
10.11	Il suono .....	836
10.12	Onde elettromagnetiche .....	836
10.13	Spettro delle onde elettromagnetiche .....	837
10.14	Dispersione .....	838

10.15 Natura ondulatoria e corpuscolare delle onde elettromagnetiche .....	838
<b>Capitolo 11 - Cenni di ottica, specchi e lenti</b>	
11.1 Specchi sferici.....	839
11.2 Costruzione e caratteristiche di un'immagine fornita da uno specchio sferico .....	840
11.3 Specchi piani .....	842
11.4 Diottra.....	842
11.5 Lenti sferiche.....	842
11.6 Costruzione e caratteristiche di un'immagine fornita da una lente.....	846
<b>Capitolo 12 - Cenni di fisica nucleare</b>	
12.1 Nucleo atomico .....	847
12.2 Isotopi, isobari e isotoni.....	848
12.3 Trasformazioni nucleari.....	848
12.4 Legge del decadimento radioattivo e radioattività .....	849
12.5 Radiazioni ionizzanti.....	851
12.6 Fissione e fusione nucleare.....	851
Capitolo 13 - Storia della fisica.....	

## Parte Quarta

### Esempi di Unità di Apprendimento

Premessa .....	855
Unità di Apprendimento 1 Temperatura, calore e cambiamenti di stato .....	865
Unità di Apprendimento 2 Il suono e i fenomeni acustici .....	873

# Capitolo 2

## Cinematica

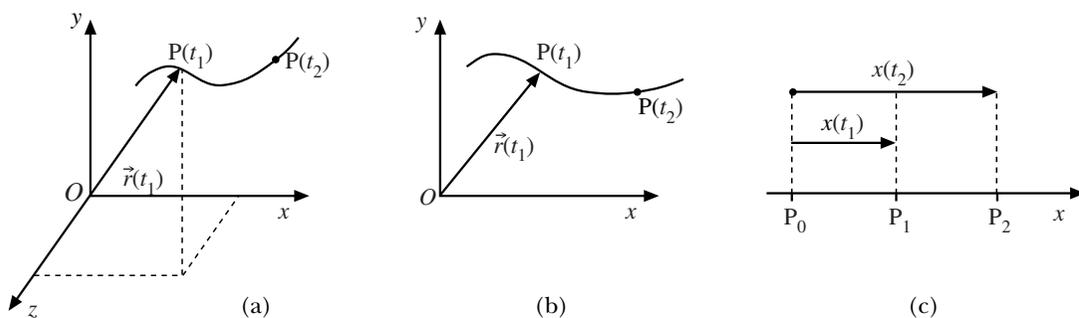
La **cinematica** è quella parte della meccanica che si interessa del moto di un corpo, indipendentemente dalle cause che producono il moto stesso. Il moto è un concetto relativo. È possibile definire che un corpo si trova in quiete o in moto solo avendo a disposizione un sistema di riferimento, costituito ad esempio da altri corpi che possono essere considerati fissi. Per semplicità in cinematica si considera che il corpo che si muove sia un corpo puntiforme, detto anche **punto materiale**.

### 2.1 Posizione e traiettoria

Si dice che un corpo è in moto quando la sua posizione, rispetto ad un sistema di riferimento di assi cartesiani, varia nel tempo.

Considerato un sistema di riferimento, la **posizione**  $\vec{r}(t)$  di un punto nell'istante  $t$  è un vettore che unisce l'origine degli assi al punto stesso. Se il punto si muove, allora la posizione è funzione del tempo.

Si chiama **traiettoria di punto in movimento** la linea che unisce tutte le posizioni da esso occupate in istanti di tempo successivi (Fig. 2.1a, b, c).



**Figura 2.1 (a)** Il punto P si muove nello spazio. Il moto è descritto da tre funzioni  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . **(b)** Il punto P si muove su un piano. Il moto è descritto da due funzioni  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . **(c)** Il punto P si muove lungo una retta. Il moto è descritto da una funzione  $x = x(t)$ .

La relazione che esprime la posizione di un punto in funzione del tempo prende il nome di **legge oraria**.

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della posizione è il *metro*, dimensioni  $[L]$ .

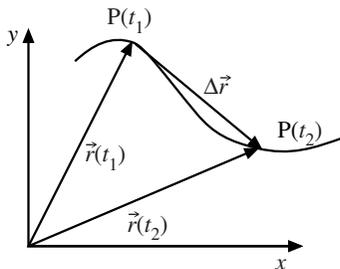
## 2.2 Vettore spostamento

Indicati con  $\vec{r}(t_1)$  e  $\vec{r}(t_2)$  i vettori posizione del punto P relativi agli istanti  $t_1$  e  $t_2$ , si definisce **vettore spostamento** (Fig. 2.2):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (2.1)$$

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura dello spostamento è il metro, dimensioni  $[L]$ .

Lo spostamento  $\Delta\vec{r}$  non coincide con il percorso del punto P ma dipende solo dalle due posizioni iniziale e finale  $P(t_1)$  e  $P(t_2)$ .



**Figura 2.2** Vettore spostamento.

## 2.3 Velocità

La **velocità vettoriale media** in un certo intervallo di tempo è un vettore definito come il rapporto tra lo spostamento e il tempo impiegato:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (2.2)$$

Il vettore  $\vec{v}_m$  assume la stessa direzione e verso del vettore  $\Delta\vec{r}$ .<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> Si può notare che la velocità vettoriale media dipende solo dalle due posizioni iniziale e finale e non dal percorso scelto, come per lo spostamento. Ad esempio, nel caso in cui il punto stia girando in tondo e, dopo un certo intervallo di tempo si trovi nella stessa posizione in cui era partito all'inizio dell'intervallo, la velocità media è nulla. Al contrario, la velocità scalare media, quella che più comunemente viene intesa come velocità, dipende dalla lunghezza percorsa e non tiene conto della direzione assunta. Un chiaro esempio ne è la velocità indicata dal tachimetro.

Nel caso di moto lungo una retta:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (2.3)$$

Per avere informazioni sulla velocità in un certo istante, ovvero sulla velocità vettoriale istantanea, si procede calcolando la velocità vettoriale media per intervalli di tempo sempre più piccoli. In questo modo lo spostamento  $\Delta \vec{r}$  si avvicina sempre più alla traiettoria percorsa e nel limite in cui l'intervallo di tempo  $\Delta t$  tende a zero,  $\Delta \vec{r}$  è tangente alla traiettoria. Ovvero, la **velocità vettoriale istantanea** definita come:

$$\vec{v}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (2.4)$$

coincide con la derivata del vettore posizione rispetto al tempo:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (2.5)$$

Il vettore  $\vec{v}_i$  ha direzione tangente alla traiettoria e verso concorde con quello del moto.

Nel caso di moto lungo una retta:

$$v_i = \frac{dx}{dt} \quad (2.6)$$

La **velocità scalare media**, o velocità, è definita dal rapporto tra lo spazio percorso e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo.

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della velocità è  $\frac{\text{metro}}{\text{secondo}}$ , le sue dimensioni sono  $[v] = [L \cdot T^{-1}]$ .

## 2.4 Accelerazione

L'**accelerazione media** in un certo intervallo di tempo è un vettore definito come il rapporto tra la variazione di velocità di un punto e l'intervallo di tempo nel quale è avvenuta tale variazione:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (2.7)$$

Il vettore  $\vec{a}_m$  ha la direzione e il verso del vettore  $\Delta\vec{v}$ .  
Nel caso di moto lungo una retta:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad (2.8)$$

Procedendo in maniera analoga a quanto visto per definire la velocità istantanea, si può definire l'**accelerazione istantanea** come:

$$\vec{a}_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (2.9)$$

che coincide con la derivata del vettore velocità rispetto al tempo:

$$\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2.10)$$

Nel caso di moto lungo una retta:

$$a_i = \frac{dv}{dt} \quad (2.11)$$

Nel Sistema Internazionale, l'unità di misura della accelerazione è *metro/secondo*<sup>2</sup>, le sue dimensioni sono  $[a] = [L \cdot T^{-2}]$ .

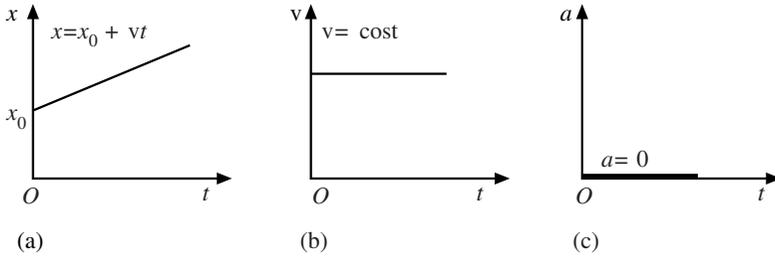
In un *moto rettilineo* l'accelerazione ha la stessa direzione della velocità e quindi della traiettoria. In un *moto curvilineo* la velocità è tangente alla traiettoria e l'accelerazione è il risultato di una componente tangente alla traiettoria e di una componente normale (perpendicolare) alla traiettoria. Quindi, in generale, l'accelerazione non è tangente alla traiettoria.

## 2.5 Moto rettilineo uniforme

Si definisce **moto rettilineo uniforme**, un moto in cui il vettore velocità è costante in modulo, direzione e verso:  $\vec{v} = \text{costante}$ . Il punto materiale si muove sulla retta con velocità costante, quindi con accelerazione nulla ( $\vec{a} = 0$ ).

Detta  $x_0$  la posizione iniziale del punto che si muove di moto rettilineo uniforme e  $v$  la velocità, vale la relazione:

$$x = x_0 + v \cdot t \quad (\text{legge oraria del moto rettilineo uniforme}) \quad (2.12)$$



**Figura 2.3** (a) Andamento in funzione del tempo della posizione, per un moto rettilineo uniforme. (b) Andamento in funzione del tempo della velocità, per un moto rettilineo uniforme. (c) Andamento in funzione del tempo della accelerazione, per un moto rettilineo uniforme.

Le Figure 2.3a, b, c mostrano per il moto rettilineo uniforme l'andamento in funzione del tempo delle grandezze: posizione  $x$ , velocità  $v$  ed accelerazione  $a$ .

## 2.6 Moto uniformemente accelerato

Si definisce **moto uniformemente accelerato**, un moto in cui il vettore accelerazione è costante in modulo, direzione e verso:  $\vec{a} = \text{costante}$ . Il punto materiale si muove su una retta, la sua velocità è diretta come l'accelerazione.

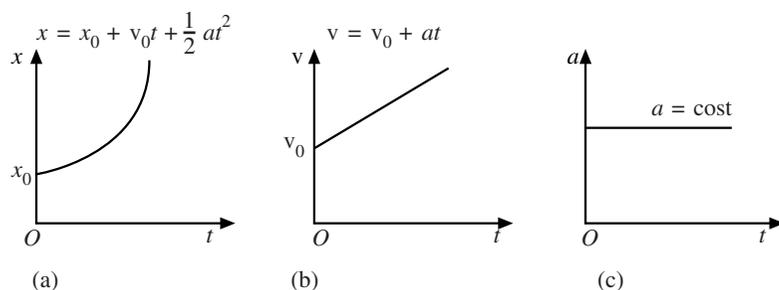
Detta  $x_0$  la posizione iniziale del punto che si muove di moto uniformemente accelerato,  $v_0$  la velocità iniziale e  $v(t)$  la velocità in un generico istante  $t$ , valgono le seguenti relazioni:

$$\boxed{v(t) = v_0 + a \cdot t} \quad (2.13)$$

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2} \quad (2.14)$$

(legge oraria del moto uniformemente accelerato)

Le Figure 2.4a,b,c mostrano per il moto uniformemente accelerato l'andamento in funzione del tempo delle grandezze: posizione  $x$ , velocità  $v$  ed accelerazione  $a$ .

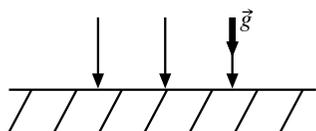


**Figura 2.4** (a) Andamento in funzione del tempo della posizione, per un moto uniformemente accelerato. (b) Andamento in funzione del tempo della velocità, per un moto uniformemente accelerato. (c) Andamento in funzione del tempo della accelerazione, per un moto uniformemente accelerato.

## 2.7 Accelerazione di gravità e caduta libera dei gravi

Dalla nostra esperienza quotidiana si vede che se gli oggetti non sono sostenuti tendono a cadere verso terra. I corpi sono soggetti ad una accelerazione dovuta alla attrazione gravitazionale della Terra. L'**accelerazione gravitazionale**  $g$  è la stessa per tutti i corpi che cadono indipendentemente dalla loro natura, massa, forma, e il suo valore è costante durante la caduta.

Il **moto di caduta libera** dei corpi sulla Terra è un moto uniformemente accelerato. Il modulo dell'accelerazione di gravità vale approssimativamente:  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  vicino alla superficie terrestre. Il vettore  $\vec{g}$  è diretto perpendicolarmente alla superficie terrestre, quindi radiale, ed orientato verso il centro della terra. Se si considera una regione limitata in prossimità della superficie terrestre, l'accelerazione di gravità a cui è sottoposto un corpo ha direzione verticale (Fig. 2.5).



**Figura 2.5** Accelerazione di gravità in prossimità della superficie terrestre.

Si consideri un corpo lasciato cadere (ovvero che parte con velocità iniziale nulla  $v_0 = 0$ ) da una altezza  $h$ . Il corpo si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. Considerando un sistema di coordinate tale che il verso positivo dell'asse  $x$  sia quello verso il basso e l'origine ( $x_0 = 0$ ) si trovi nella posizione iniziale, ad una altezza  $h$  (Fig. 2.6), le relazioni che regolano il moto sono:

$$\boxed{v(t) = g \cdot t} \quad (\text{dalla 2.13 con } v_0 = 0) \quad (2.15)$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2} \quad (\text{dalla 2.14 con } x_0 = 0, v_0 = 0) \quad (2.16)$$

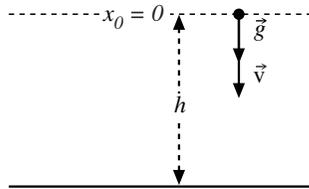
dove  $x(t)$ , che è la posizione del corpo nel generico istante  $t$ , indica lo spazio percorso a partire dalla posizione iniziale  $x_0 = 0$ .

Segue che  $h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$  dove  $t$  è il tempo di caduta<sup>(2)</sup>:

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \quad (2.17)$$

La velocità raggiunta dal corpo nell'istante in cui tocca terra si ricava sostituendo l'espressione del tempo di caduta  $t$  nella (2.15):

$$\boxed{v = \sqrt{2gh}} \quad (2.18)$$



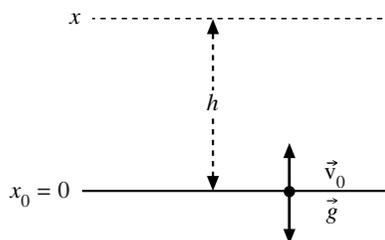
**Figura 2.6** Caduta di un grave per effetto della attrazione gravitazionale.

Si consideri ora un corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $v_0$  (Fig. 2.7). Considerando un sistema di coordinate tale che il verso positivo dell'asse  $x$  sia quello verso l'alto e l'origine ( $x_0 = 0$ ) si trovi nella posizione iniziale, il moto del corpo è uniformemente decelerato e le relazioni che regolano tale moto possono essere riscritte come:

$$v(t) = v_0 - g \cdot t \quad (\text{il segno meno tiene conto del fatto che la velocità (verso l'alto) e l'accelerazione di gravità (verso il basso) hanno verso opposto}) \quad (2.19)$$

$$x(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (\text{per } x_0 = 0 \text{ e versi opposti di velocità e accelerazione di gravità}) \quad (2.20)$$

<sup>(2)</sup> Si può notare che in assenza di attrito il tempo di caduta è indipendente dalla natura del corpo che cade. Il tempo di caduta dipende dalla quota di partenza.



**Figura 2.7** Moto di un corpo lanciato verso l'alto.

Il tempo necessario a raggiungere l'altezza massima si ricava dalla (2.19) ponendo  $v(t) = 0$ , come:

$$t = \frac{v_0}{g} \quad (2.21)$$

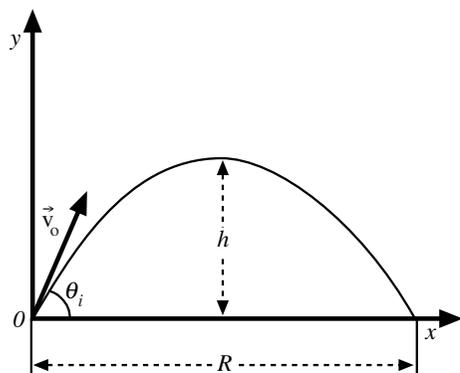
L'altezza massima raggiunta dal corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale  $v_0$  si ricava sostituendo l'espressione del tempo  $t$  necessario per raggiungere l'altezza massima nella (2.20), come:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \quad (2.22)$$

## 2.8 Moto di un proiettile

Il moto di un proiettile o di una pallina lanciata con velocità iniziale  $\vec{v}_0$  in una certa direzione, come in Figura 2.8, è un esempio di moto in due direzioni.

Se si trascura la resistenza dell'aria, il moto del proiettile è regolato dall'accelerazione di gravità  $g$  che è costante. Considerando un sistema di assi cartesiani  $x, y$ , come in Figura 2.8, segue che l'accelerazione lungo la direzione  $x$  è nulla mentre lungo la direzione  $y$  è negativa in quanto l'accelerazione di gra-



**Figura 2.8** Moto di un proiettile.



# il **nuovo** concorso a cattedra

Il presente volume si pone come utile strumento di studio per quanti si apprestano alla preparazione del **concorso a cattedra** per le classi il cui programma d'esame comprende le **scienze matematiche e fisiche** e contiene sia le principali **conoscenze teoriche** necessarie per superare tutte le fasi della selezione concorsuale, che preziosi **spunti operativi** per l'ordinaria attività d'aula.

Il volume è strutturato in più parti. La **prima** tratta gli **aspetti ordinamentali** relativi all'insegnamento della matematica e della fisica nella scuola secondaria di primo grado, così come emergono dalle Indicazioni nazionali e nell'ambito delle prescrizioni europee e del sistema di rilevazione internazionale. Vengono inoltre presentate le **nuove tecnologie per la didattica** (software specifici per la matematica: geometria dinamica, calcolo simbolico).

La **seconda parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La **terza parte**, dedicata alla **Fisica**, si occupa dei contenuti specifici della materia nel modo più completo possibile.

L'**ultima parte** del testo è infine incentrata sulla **pratica dell'attività d'aula** e contiene esempi di **Unità di Apprendimento** utilizzabili come modello per una didattica metacognitiva e partecipativa.

Il manuale è completato da ulteriori **materiali didattici, approfondimenti e risorse** di studio accessibili **online** dalla propria area riservata.

I servizi web sono disponibili per 12 mesi dall'attivazione del codice.

## PER COMPLETARE LA PREPARAZIONE:

CC 1/1 • **LE AVVERTENZE GENERALI** • ISBN: 9788865845813

CC 4/28 • **SCIENZE NATURALI NELLA SCUOLA SECONDARIA** • ISBN: 9788865846209



www.edises.it  
info@edises.it

 Per essere sempre aggiornato seguici su Facebook  
facebook.com/ilconcorsoacattedra

Clicca su mi piace  per ricevere gli aggiornamenti.



€ 45,00

