

tfa

tirocinio formativo attivo

Scienze matematiche e fisiche

manuale per prove scritte e orali

per la classe di abilitazione

A28 Matematica e Scienze | **A059** Scienze matematiche, chimiche,
fisiche e naturali nella scuola secondaria di primo grado



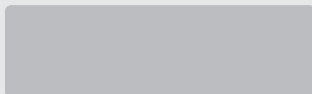
Comprende **software**
per effettuare infinite
esercitazioni





Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it** e accedere ai **servizi** e **contenuti riservati**.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie



Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.

L'**accesso ai servizi riservati** ha la durata di **un anno** dall'attivazione del codice e viene garantito esclusivamente sulle edizioni in corso.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

▼
Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

▼
Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito o autenticali tramite facebook
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*

TFA

Scienze matematiche e fisiche

Manuale per prove scritte e orali
per la classe di abilitazione

A28 Matematica e Scienze | A059 Scienze
matematiche, chimiche, fisiche e naturali nella scuola
secondaria di primo grado



TFA – Scienze matematiche e fisiche nella scuola secondaria di primo grado – Manuale teorico
Copyright © 2014, Edises S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1
2020 2019 2018 2017 2016

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

*A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale,
del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.*

L'Editore

Autori:

Emiliano Barbuto, dirigente scolastico, già docente di Matematica e Fisica nella scuola secondaria di secondo grado, ha partecipato a esperimenti di fisica nucleare presso il CERN di Ginevra e i Laboratori del Gran Sasso. È autore di numerose pubblicazioni di carattere didattico e divulgativo sulla matematica.

Progetto grafico: ProMedia Studio di A. Leano – Napoli

Fotocomposizione: Oltrepagina – Verona

Grafica di copertina:  curvilinee

Stampato presso Petruzzi S.r.l. – Via Venturelli 7/B – Città di Castello (PG)

Per conto della Edises – Piazza Dante, 89 – Napoli

ISBN 978 88 6584 461 8

www.edises.it
info@edises.it

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi all'indirizzo redazione@edises.it

Sommario

Parte Prima La didattica disciplinare

Capitolo 1	La matematica nel quadro normativo europeo	3
Capitolo 2	Rilevazione degli apprendimenti e didattica della matematica	19
Capitolo 3	Software didattici	45

Parte Seconda Matematica

Capitolo 1	Insiemi, relazioni, funzioni	79
Capitolo 2	Geometria euclidea e geometrie non euclidee	119
Capitolo 3	Insiemi numerici	199
Capitolo 4	Il metodo delle coordinate	285
Capitolo 5	Funzioni reali e calcolo numerico	407
Capitolo 6	Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile	453
Capitolo 7	Elementi di calcolo delle probabilità e di statistica	609

Parte Terza Fisica

Capitolo 1	Le grandezze fisiche	709
Capitolo 2	Cinematica	719
Capitolo 3	Dinamica	733



Capitolo 4	Lavoro ed energia.....	749
Capitolo 5	Statica	757
Capitolo 6	Meccanica dei fluidi.....	763
Capitolo 7	Termologia e Termodinamica.....	775
Capitolo 8	Elettricità.....	799
Capitolo 9	Magnetismo.....	819
Capitolo 10	Le onde.....	829
Capitolo 11	Cenni di ottica, specchi e lenti.....	839
Capitolo 12	Cenni di fisica nucleare.....	847

Finalità e struttura dell'opera

Il presente lavoro è concepito come supporto per quanti si accingono ad affrontare le prove del tirocinio formativo attivo, rappresentando un valido strumento di ausilio per tutti coloro che intendono intraprendere la professione docente. La complessità della scuola moderna ha imposto non poche riflessioni nella stesura del volume, dalle quali è risultata un'opera che intende contribuire a formare un docente che:

- sia in possesso dei contenuti della disciplina ad un livello spesso superiore a quello che gli viene richiesto dalla didattica in classe;
- sia un professionista della comunicazione, un individuo che ha maturato capacità empatiche ed un abile gestore del contesto classe.

La “scuola dei programmi” prescrittivi ed obbligatori, da dover terminare entro la fine dell'anno scolastico, anche a rischio di lasciare indietro qualche alunno più bisognoso di supporto, ha gradualmente lasciato il posto alla “scuola della programmazione” che ha tentato di adeguare al contesto classe, attraverso un continuo lavoro di feedback, l'attività di insegnamento e gli obiettivi da conseguire. Negli ultimi due decenni, alla “scuola della programmazione” è subentrata la “scuola dell'autonomia e della personalizzazione”.

In queste due espressioni è riassunto tutto il moderno approccio della didattica. L'autonomia scolastica, declinata in tutte le sue forme, permette a ciascuna scuola di creare un proprio curriculum da proporre alla sua utenza. Questo curriculum è il frutto dell'interazione della istituzione scolastica con il “territorio” e con tutti gli *stakeholder*, sicché ciascuna scuola diventa una cellula vitale nella realtà sociale ed economica del territorio.

Alle caratteristiche specifiche di ogni singola istituzione scolastica, si aggiungono gli stili cognitivi e le particolari inclinazioni di ogni singolo alunno. Ecco, quindi, che subentra la personalizzazione del percorso di apprendimento e la capacità del docente di adeguare la propria didattica non più al contesto classe, dove potrebbe essere recepita solo “in media” e non “singolarmente”, ma piuttosto al singolo alunno, quale “realtà” cognitiva specifica e irripetibile.

Perché la personalizzazione dell'apprendimento abbia luogo, il docente deve avvalersi di un'approfondita conoscenza dei contenuti che vuole proporre. In questo modo, egli riesce a declinarli con proprietà ed incisività, mettendo in rilievo tutti gli aspetti critici. Analogamente, il docente deve essere in grado di operare con padronanza e sicurezza usando le nuove tecnologie. Sono queste ultime che possono mettere in rilievo gli stili cognitivi degli alunni, la loro propensione a comprendere attraverso canali di comunicazione multimodale,



usando – oltre al manuale – simulazioni, immagini in movimento, narrazioni sonore, diagrammi. È opinione comune che, in futuro, il testo perderà la propria funzione predominante di veicolo per la trasmissione della conoscenza e sarà affiancato (anche se non sostituito), con pari dignità, da altri strumenti (suoni, immagini, simulazioni) con i quali gli studenti di oggi familiarizzano già.

L'attenzione si sposta quindi dalla pratica di insegnamento del docente al processo di apprendimento dello studente. Questo vuol dire che la didattica trasmissiva, fatta di una mole interminabile di nozioni che allo studente rischiano di apparire vuote di significati, occorre sostituire una didattica improntata alla maturazione delle competenze negli alunni. Questi ultimi devono cogliere l'utilità di ciò che studiano e riuscire a richiamarne il significato in un contesto reale, così da applicare le conoscenze di cui sono entrati in possesso.

Inutile dire che la didattica delle discipline matematiche e scientifiche risente particolarmente di queste criticità e potrebbe beneficiare oltremodo di un approccio multimodale nella dinamica di insegnamento ed apprendimento. Tali discipline devono far maturare nello studente quelle competenze fondamentali affinché egli diventi cittadino partecipe e cosciente della società di domani. Pertanto il docente deve sapersi allontanare dalla cattedra ed avvicinarsi ai banchi, assumendo anche il ruolo di tutor, ossia di professionista della formazione, di persona che coglie i bisogni reali degli alunni e declina la propria disciplina in base a tali necessità.

In particolare, la matematica deve diventare la “matematica dell'utile”, affinché chi si avvicina ad essa possa comprenderne l'importanza in contesti pratici e reali che certamente contribuiscono a renderla più affascinante agli occhi di chi la studia.

Le ultime indagini internazionali (OCSE-PISA, IEA-TIMSS) e le prove del servizio nazionale di valutazione a cura dell'INVALSI sono orientate proprio a mettere in evidenza questi aspetti della disciplina. Probabilmente gli scarsi risultati conseguiti dagli studenti italiani nelle precedenti indagini internazionali su tali materie hanno messo in evidenza la scarsa diffusione di tale approccio nella scuola italiana. Come controprova, l'evidente miglioramento dei risultati nell'ultima indagine OCSE-PISA, determinato in buona parte dal miglioramento dei risultati nelle regioni meridionali che in precedenza avevano segnato il passo, è frutto di una serie di interventi sistemici che il Ministero, gli enti di ricerca e le istituzioni scolastiche hanno posto in essere negli ultimi anni.

Il volume è strutturato in tre parti. La **prima parte** tratta gli **aspetti ordinamentali** correlati all'insegnamento della Matematica, così come emergono dalle Indicazioni Nazionali anche nell'ambito delle prescrizioni europee e del sistema di rilevazione internazionale. Vengono inoltre presentate le **nuove tecnologie per la didattica** (software specifici per la matematica: geometria dinamica, calcolo simbolico). La **seconda parte**, dedicata alla **Matematica**, affronta i contenuti disciplinari con approcci formali e rigorosi, ma anche pratici e intuitivi, con l'obiettivo di venire incontro alle diverse esperienze formative e ai diversi

percorsi di studio che una platea piuttosto disomogenea di candidati può trovarsi di fronte. La **terza parte**, dedicata alla **Fisica**, si occupa dei contenuti specifici della materia nel modo più completo possibile.

Questo lavoro, ricco, complesso, denso di rinvii normativi e spunti operativi per l'attività dei futuri insegnanti, tratta materie in continua evoluzione.

Ulteriori **materiali didattici** e **approfondimenti** sono disponibili nell'area riservata a cui si accede mediante la registrazione al sito *edises.it* secondo la procedura indicata nel frontespizio del volume.

Altri aggiornamenti saranno disponibili sui nostri profili social.

Facebook.com/iltirocinioformativoattivo

Clicca su  (Facebook) per ricevere gli aggiornamenti

Indice

Parte Prima La didattica disciplinare

Capitolo 1 - La matematica nel quadro normativo europeo

1.1	Le competenze chiave per l'apprendimento permanente	3
1.1.1	La strategia di Lisbona e l'apprendimento permanente.....	3
1.1.2	Le competenze chiave per l'apprendimento permanente.....	4
1.1.3	La matematica nelle otto competenze.....	6
1.2	Le Indicazioni per il curriculum del primo ciclo di istruzione	7
1.2.1	Gli aspetti innovativi delle Indicazioni per il curriculum	7
1.2.2	La matematica nelle Indicazioni per il curriculum.....	9
1.2.3	Le nuove Indicazioni per il curriculum 2012	12
1.3	Le competenze chiave di cittadinanza e l'asse matematico.....	13
1.3.1	Gli assi culturali e le competenze chiave per la cittadinanza	13
1.3.2	L'asse matematico	15
1.3.3	Il quadro delle competenze comuni a tutti i percorsi di istruzione	17

Capitolo 2 - Rilevazione degli apprendimenti e didattica della matematica

2.1	Le rilevazioni Invalsi.....	19
2.1.1	L'Invalsi e la rilevazione degli apprendimenti nella scuola secondaria ...	19
2.1.2	La prova di matematica	20
2.1.3	I contenuti matematici.....	21
2.1.4	I processi.....	24
2.1.5	Le prove Invalsi: come sono strutturate e cosa rilevano	25
2.2	L'indagine OCSE-PISA	28
2.2.1	Aspetti generali dell'indagine	28
2.2.2	Competenze.....	28
2.2.3	Contenuti, processi, capacità soggiacenti e contesto.....	31
2.2.4	Analisi delle prove OCSE-PISA.....	33
2.3	La didattica per competenze in matematica	35
2.3.1	I risultati della scuola italiana nelle prove OCSE-PISA.....	35
2.3.2	Le cause dei risultati poco soddisfacenti dell'Italia in matematica.....	36
2.3.3	Approccio formale e teorico alla disciplina.....	38
2.3.4	Approccio laboratoriale e contestualizzato alla disciplina	41
2.4	L'indagine IEA-TIMSS	42



Capitolo 3 – Software didattici

3.1	Software di Geometria Dinamica	46
3.1.1	Panoramica sui software di geometria dinamica.....	46
3.1.2	Geogebra – funzionalità di carattere generale	47
3.1.3	Costruzione e verifica delle proprietà del baricentro di un triangolo	49
3.1.4	Costruzione e verifica delle proprietà dell’ortocentro di un triangolo	54
3.1.5	Costruzione di una parabola i cui parametri variano dinamicamente.....	57
3.1.6	Il significato geometrico della derivata di una funzione in un punto.....	60
3.2	I software di calcolo simbolico	62
3.2.1	Panoramica sui software di calcolo simbolico	62
3.2.2	wxMaxima – funzionalità di carattere generale	64
3.2.3	Calcoli algebrici.....	65
3.2.4	Calcolo letterale	67
3.2.5	Risoluzione di equazioni e sistemi di equazioni.....	70
3.2.6	Calcoli di analisi matematica e rappresentazione delle funzioni.....	72

Parte Seconda Matematica

Capitolo 1 – Insiemi, relazioni, funzioni

1.1	Concetti fondamentali	79
1.2	Relazione di inclusione.....	80
1.3	Operazioni tra insiemi	81
1.4	Insieme delle parti	84
1.5	Coppia ordinata e prodotto cartesiano.....	84
1.6	Relazione binaria.....	85
1.7	Relazioni di equivalenza	87
1.8	Relazioni d’ordine largo	88
1.9	Relazioni d’ordine stretto	89
1.10	Funzioni	89
1.11	Funzioni suriettive, iniettive e biiettive	91
1.12	Funzioni composte	93
1.13	Funzione inversa e identità.....	93
1.14	Cardinalità di un insieme	94
1.14.1	Insiemi equipotenti e numeri cardinali.....	94
1.14.2	Operazioni tra numeri cardinali	95
1.14.3	Insiemi finiti e insiemi numerabili.....	96
1.14.4	Insiemi numerici numerabili.....	98

1.14.5	Insiemi numerici non numerabili.....	101
1.14.6	L'ipotesi del continuo.....	105
1.15	Calcolo combinatorio	106
1.15.1	Principio di moltiplicazione	106
1.15.2	Fattoriale di un numero	107
1.15.3	Disposizioni con ripetizione	107
1.15.4	Disposizioni	108
1.15.5	Permutazioni	109
1.15.6	Permutazioni con ripetizione.....	109
1.15.7	Combinazioni	110
1.15.8	Combinazioni con ripetizione.....	111
1.15.9	Il coefficiente binomiale.....	111
1.15.10	Formula del binomio di Newton.....	112
1.15.11	Somma di coefficienti binomiali	113
1.15.12	Il triangolo di Tartaglia.....	113
1.16	Il metodo assiomatico	115
1.16.1	Le teorie matematiche	115
1.16.2	La definizione dei termini.....	115
1.16.3	Distinzione tra termine e concetto: teorie realistiche e teorie formali ..	116

Capitolo 2 - Geometria euclidea e geometrie non euclidee

2.1	Gli <i>Elementi</i> di Euclide	119
2.1.1	La struttura degli <i>Elementi</i> di Euclide	119
2.1.2	Definizioni, assiomi e postulati nel primo libro degli <i>Elementi</i>	119
2.1.3	Il quinto postulato di Euclide.....	122
2.1.4	Il quinto postulato e la struttura del primo libro degli <i>Elementi</i>	123
2.2	Trasformazioni affini tra piani e affinità nel piano	127
2.2.1	Trasformazioni affini.....	127
2.2.2	Affinità	131
2.2.3	Proprietà delle affinità	132
2.2.4	Punti uniti di una trasformazione	136
2.2.5	Le similitudini e il gruppo Euclideo	139
2.2.6	Particolari similitudini: omotetie	144
2.2.7	Isometrie	147
2.2.8	Isometrie dirette	148
2.2.9	Isometrie inverse	156
2.2.10	Riepilogo.....	160
2.3	L'idea della geometria proiettiva	162
2.3.1	La prospettiva	162
2.3.2	La retta proiettiva.....	162
2.3.3	Il piano proiettivo	165
2.3.4	Coordinate omogenee nel piano proiettivo.....	169
2.3.5	Spazio proiettivo e coordinate omogenee nello spazio.....	171
2.3.6	Definizione operativa di spazio proiettivo	171
2.4	Operare con le coordinate omogenee.....	173
2.4.1	Rette nel piano	173



2.4.2	Coniche in coordinate omogenee	175
2.5	Le proiettività	177
2.5.1	Proiettività sulla retta proiettiva	177
2.5.2	Punti uniti	178
2.5.3	Il birapporto	181
2.5.4	Proiettività sul piano	183
2.5.5	Punti uniti e rette unite	186
2.5.6	Studio della prospettiva	192

Capitolo 3 - Insiemi numerici

3.1	Leggi di composizione interne ed esterne	199
3.2	L'insieme dei numeri naturali	199
3.2.1	Assiomi di Peano	200
3.2.2	Addizione di naturali	201
3.2.3	Moltiplicazione di naturali	203
3.2.4	Relazione d'ordine nei naturali	204
3.2.5	La divisione euclidea	205
3.2.6	La potenza	207
3.3	Rappresentazione dei numeri naturali	207
3.3.1	I primi modi di rappresentare i numeri naturali	207
3.3.2	Il sistema di numerazione dell'antica Roma	208
3.3.3	Il sistema di numerazione decimale	209
3.3.4	Il sistema di numerazione binario	210
3.3.5	Conversioni	211
3.4	L'insieme dei numeri interi	212
3.5	I numeri razionali	216
3.5.1	Definizione dell'insieme dei numeri razionali	216
3.5.2	Operazioni nell'insieme dei numeri razionali	217
3.5.3	La relazione d'ordine nell'insieme dei numeri razionali	218
3.5.4	Scrittura posizionale dei numeri razionali	219
3.6	Le problematiche che portano alla nascita dei numeri reali	221
3.6.1	La scrittura posizionale	221
3.6.2	L'estrazione di radice	221
3.6.3	Le grandezze incommensurabili	221
3.6.4	Le soluzioni di equazioni a coefficienti interi	223
3.6.5	La quadratura del cerchio	224
3.7	La costruzione dell'insieme dei numeri reali	224
3.7.1	Primo approccio: la notazione posizionale	224
3.7.2	Secondo approccio: i tagli di Dedekind	224
3.7.3	Terzo approccio: le successioni di numeri razionali	228
3.8	Numeri irrazionali, numeri algebrici e numeri trascendenti	228
3.8.1	I numeri irrazionali	228
3.8.2	Numeri che sono zeri di un polinomio: i numeri algebrici	229
3.8.3	Numeri che non sono zeri di un polinomio: i numeri trascendenti	230
3.9	Le strutture algebriche	231
3.9.1	Definizione di struttura algebrica	231

3.9.2	Proprietà associativa e semigrupperi.....	231
3.9.3	Esistenza dell'elemento neutro e monoidi.....	232
3.10	I gruppi.....	233
3.10.1	Esistenza dell'elemento inverso	233
3.10.2	Definizione di gruppo.....	233
3.10.3	Proprietà commutativa e gruppi abeliani	234
3.10.4	Gruppi finiti, infiniti e finitamente generati, insiemi di generatori	235
3.11	Aritmetica modulare	236
3.11.1	Congruenza modulo n	236
3.11.2	Teoremi dell'aritmetica modulare	236
3.11.3	Classi di congruenza modulo n e insieme quoziente	237
3.11.4	Gruppi definiti mediante la relazione di congruenza	238
3.12	Gruppi ciclici	240
3.12.1	Caratteristiche di un gruppo ciclico e periodo degli elementi	240
3.12.2	Gruppi additivi	241
3.12.3	Gruppi moltiplicativi.....	241
3.13	Tavole di Cayley	243
3.14	Prodotto di gruppi	244
3.15	I sottogruppi e i laterali destro e sinistro.....	245
3.15.1	Definizione di sottogruppo	245
3.15.2	Classi laterali.....	245
3.15.3	Sottogruppi normali	247
3.16	Gruppi risolubili.....	251
3.17	I gruppi simmetrici	252
3.17.1	Permutazioni	252
3.17.2	Il gruppo simmetrico delle permutazioni	253
3.17.3	Cicli e trasposizioni	254
3.17.4	Le permutazioni pari e il gruppo alterno.....	258
3.17.5	Risolubilità dei gruppi simmetrici S_2 , S_3 e S_4	259
3.17.6	Il gruppo simmetrico S_5	261
3.18	Gruppo diedrale.....	262
3.18.1	Definizione	262
3.18.2	Interpretazione geometrica.....	263
3.19	Isomorfismo tra gruppi e gruppi isomorfi	268
3.20	Anelli.....	272
3.20.1	Definizione	272
3.20.2	Anello dei polinomi	273
3.21	Corpi e campi.....	275
3.21.1	Definizioni	275
3.21.2	Estensione di un campo.....	276
3.21.3	Campo di spezzamento (o campo di riducibilità completa).....	278
3.22	Teoria di Galois	280
3.22.1	L'idea	280
3.22.2	Gruppo di Galois.....	281
3.22.3	Risolubilità per radicali di un'equazione di grado n	283



Capitolo 4 - Il metodo delle coordinate

4.1	Gli spazi vettoriali	285
4.1.1	Definizione di spazio vettoriale	285
4.1.2	Sottospazio.....	288
4.1.3	Combinazione lineare di vettori	289
4.1.4	Dipendenza e indipendenza lineare.....	290
4.1.5	Generatori e basi	291
4.1.6	Dimensione di uno spazio vettoriale.....	293
4.2	Applicazioni lineari	294
4.2.1	Definizione di applicazione lineare	294
4.2.2	Composizione di applicazioni lineari	295
4.2.3	Un esempio di spazio vettoriale: lo spazio vettoriale delle applicazioni lineari.....	295
4.2.4	Nucleo ed immagine di un'applicazione lineare.....	296
4.2.5	Particolari applicazioni lineari	297
4.3	Matrici	298
4.3.1	Definizioni	298
4.3.2	Lo spazio vettoriale delle matrici	299
4.3.3	Moltiplicazione tra matrici	302
4.3.4	Corrispondenza tra matrici ed applicazioni lineari	307
4.3.5	Isomorfismo tra matrici e applicazioni lineari	311
4.3.6	Matrici associate ad endorfismi, matrici simili	311
4.3.7	Composizione di applicazioni lineari e matrici.....	312
4.4	Determinanti	312
4.4.1	Definizione e calcolo del determinante di una matrice	312
4.4.2	Proprietà del determinante di una matrice.....	318
4.4.3	Rango di una matrice.....	321
4.5	Sistemi lineari.....	325
4.5.1	Definizione di sistema lineare	325
4.5.2	Sistemi lineari compatibili	326
4.5.3	Soluzioni di sistemi lineari quadrati	327
4.5.4	Soluzioni di sistemi lineari generici	328
4.5.5	Procedura per la risoluzione di un generico sistema	329
4.5.6	Matrice inversa	335
4.5.7	Sistemi lineari omogenei	338
4.6	Diagonalizzazione di matrici	341
4.6.1	Autovettore, autovalore e autospazio.....	341
4.6.2	Matrici diagonalizzabili.....	342
4.6.3	Algoritmo per diagonalizzare le matrici	343
4.6.4	Polinomi e condizioni di diagonalizzazione.....	345
4.6.5	Segnatura di una matrice	345
4.7	Punti, rette e vettori nello spazio euclideo	351
4.8	Geometria analitica nel piano	353
4.8.1	Punti nel piano cartesiano.....	353
4.8.2	Vettori nel piano cartesiano	354
4.8.3	Le curve algebriche.....	357

4.9	Curve algebriche di primo grado: le rette	358
4.9.1	Equazione di una retta in forma parametrica	358
4.9.2	Equazione di una retta in forma implicita	359
4.9.3	Intersezione di due rette	359
4.9.4	Rette: casi particolari	362
4.9.5	Equazione della retta in forma segmentaria	363
4.9.6	Equazione della retta in forma esplicita	364
4.9.7	Fasci di rette	365
4.9.8	Alcune relazioni utili sulla retta	367
4.10	Curve algebriche di secondo grado: le coniche	369
4.10.1	Classificazione di una conica	369
4.10.2	Riduzione a forma normale di una conica	372
4.10.3	Le coniche come sezioni di un cono a due falde	378
4.11	Geometria analitica nello spazio	380
4.11.1	Punti nello spazio	380
4.11.2	Vettori nello spazio	381
4.12	Superfici algebriche di primo grado: i piani	385
4.12.1	Equazione parametrica del piano	385
4.12.2	Equazione generale del piano	385
4.12.3	Equazioni di piani particolari	389
4.12.4	Intersezione di due piani e condizione di parallelismo	390
4.13	Le rette nello spazio	391
4.13.1	Equazioni parametriche della retta	391
4.13.2	Equazioni normali della retta	392
4.13.3	Equazioni generali ed equazioni ridotte della retta	392
4.13.4	Intersezione tra retta e piano (rette e piani paralleli)	396
4.13.5	Rette parallele e perpendicolari	397
4.13.6	Piani paralleli e perpendicolari	399
4.13.7	Rette e piani perpendicolari	399
4.13.8	Distanza di un punto da un piano	400
4.14	Superfici algebriche di secondo ordine: le quadriche	400
4.14.1	Classificazione di una quadrica	400

Capitolo 5 - Funzioni reali e calcolo numerico

5.1	Intervalli e intorni	407
5.1.1	Tipologie di intervalli	407
5.1.2	Intorni e intorni circolari	409
5.2	Funzioni reali di variabili reali	409
5.2.1	Generalità	409
5.2.2	Campo di esistenza ed immagine	411
5.2.3	Funzioni composte	412
5.2.4	Funzioni invertibili	412
5.2.5	Funzioni monotone	413
5.2.6	Funzioni pari e dispari	416
5.2.7	Funzioni periodiche	417
5.2.8	Funzioni elementari	418



5.2.9	Determinazione del campo di esistenza delle funzioni reali	425
5.3	Errori nel calcolo numerico	427
5.3.1	Premessa	427
5.3.2	Rappresentazione esponenziale dei numeri reali.....	427
5.3.3	I numeri in virgola mobile.....	429
5.3.4	Perdita di informazione nel calcolo con numeri floating point	431
5.3.5	Arrotondare e troncare.....	433
5.3.6	Errore assoluto ed errore relativo	435
5.3.7	Errore assoluto limite ed errore relativo limite.....	437
5.3.8	Cifre decimali corrette e cifre significative corrette	441
5.4	Propagazione dell'errore.....	442
5.4.1	Alcune regole basilari di propagazione dell'errore	442
5.4.2	Problema, algoritmo ed elaboratore.....	444
5.4.3	Condizionamento di un problema	445
5.4.4	Stabilità di un algoritmo	449

Capitolo 6 – Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile

6.1	Limite di una funzione	453
6.1.1	Punti di accumulazione	453
6.1.2	Definizione di limite	454
6.1.3	Limiti per funzioni divergenti in un punto	455
6.1.4	Verifica del limite	457
6.1.5	Limite destro e limite sinistro.....	460
6.1.6	Teoremi sui limiti	462
6.1.7	Operazioni sui limiti	464
6.1.8	Generalizzare le operazioni sui limiti	465
6.1.9	Limiti di funzioni elementari e limiti notevoli.....	467
6.1.10	Calcolo di limiti.....	470
6.2	Successioni e limiti di successioni	474
6.2.1	Definizione e generalità.....	474
6.2.2	Limite di una successione di numeri reali.....	477
6.3	Continuità delle funzioni reali	478
6.3.1	Funzione continua	478
6.3.2	Funzione uniformemente continua.....	483
6.3.3	Punti di discontinuità	484
6.3.4	Individuare i punti di discontinuità di una funzione	486
6.4	Derivata.....	487
6.4.1	Rapporto incrementale.....	487
6.4.2	Definizione di derivata e derivabilità	488
6.4.3	Derivata destra e sinistra.....	489
6.4.4	Continuità e derivabilità	489
6.4.5	Dal rapporto incrementale alla derivata.....	490
6.4.6	Interpretazione geometrica della derivata	492
6.4.7	Retta tangente ad una funzione in un punto	494
6.4.8	Regole di derivazione.....	495

6.4.9	Calcolo di derivate	495
6.4.10	Punti di discontinuità della derivata	498
6.4.11	Derivate di ordine superiore	501
6.4.12	Differenziale	502
6.5	Calcolo differenziale e studio di una funzione di variabile reale	503
6.5.1	Teorema di Rolle, Cauchy e Lagrange	503
6.5.2	Condizioni sulla monotonia di una funzione	507
6.5.3	Massimi e minimi assoluti di una funzione	508
6.5.4	Estremo inferiore ed estremo superiore	508
6.5.5	Massimo e minimo relativo	510
6.5.6	Ricerca dei punti di massimo e minimo relativo e assoluto	511
6.5.7	Condizioni su concavità e punti di flesso	515
6.5.8	I teoremi di l'Hopital	517
6.5.9	Asintoti di una funzione	520
6.5.10	Studio del grafico di una funzione	522
6.6	Il problema della misura	530
6.6.1	Introduzione	530
6.6.2	La misura di Peano-Jordan	530
6.6.3	La misura di Vitali-Lebesgue	536
6.7	Integrazione indefinita	538
6.7.1	Definizioni	538
6.7.2	Regole di integrazione	540
6.7.3	Metodi risolutivi per integrali di frazioni algebriche	546
6.8	Integrazione definita	551
6.8.1	Somma inferiore e somma superiore	551
6.8.2	Dalle somme all'integrale di Riemann	553
6.8.3	Le somme di Cauchy-Riemann	554
6.8.4	Funzioni integrabili	556
6.8.5	Proprietà degli integrali definiti	557
6.8.6	Teoremi sull'integrazione definita	558
6.9	Integrali impropri	563
6.9.1	Caso di un intervallo semi-aperto	563
6.9.2	Caso di un intervallo aperto	564
6.9.3	Caso generale: funzione generalmente continua su un intervallo limitato o illimitato	565
6.10	Calcolo di volumi di solidi di rotazione	566
6.11	Lunghezza di una curva ed area della superficie di rotazione	568
6.12	Serie numeriche	571
6.12.1	Definizioni	571
6.12.2	Serie a termini positivi, a termini di segno alterno e a termini qualunque	573
6.12.3	La serie geometrica	574
6.12.4	Resto di una serie	575
6.12.5	Teoremi generali sul carattere delle serie	577
6.13	Criteri di convergenza delle serie a termini positivi	578
6.13.1	Premessa	578
6.13.2	Criterio del confronto con l'integrale (Cauchy)	578



6.13.3	La serie di Dirichlet e la serie armonica	579
6.13.4	Criterio del confronto (o di Gauss)	580
6.13.5	Secondo criterio del confronto	581
6.13.6	Criterio del rapporto (o di D'Alembert)	582
6.13.7	Criterio della radice (o di Cauchy)	583
6.14	Criteri di convergenza delle serie a termini alterni e qualunque	584
6.14.1	Criterio di Leibnitz	584
6.14.2	La convergenza assoluta	585
6.14.3	Criteri di Cauchy e D'Alembert per serie a termini a segni alterni o qualunque	586
6.15	Sviluppo in serie di funzioni	587
6.15.1	Le serie di funzioni	587
6.15.2	Le serie di potenze	589
6.15.3	La serie di Mac Laurin	591
6.15.4	Sviluppo in serie di Mac Laurin di alcune funzioni elementari	593
6.15.5	La formula di Eulero	596
6.15.6	La serie di Taylor	597
6.15.7	Applicazioni della serie di Taylor	598
6.15.8	La serie di Fourier	604

Capitolo 7 - Elementi del calcolo delle probabilità e di statistica

7.1	Definire la probabilità	609
7.1.1	Esperimento, insieme universo ed eventi	609
7.1.2	Particolari tipi di eventi e relazioni tra eventi	610
7.1.3	Definizione classica della probabilità	611
7.1.4	Definizione frequentista (o statistica) della probabilità	616
7.1.5	Definizione soggettiva di probabilità (o probabilità su scommessa)	621
7.1.6	Definizione assiomatica di probabilità	624
7.2	Teoremi fondamentali della teoria della probabilità	626
7.2.1	Probabilità dell'evento somma e probabilità dell'evento prodotto	626
7.2.2	Probabilità condizionata e probabilità composta	627
7.2.3	Indipendenza stocastica	630
7.2.4	Formula della probabilità totale	632
7.2.5	Teorema di Bayes	634
7.3	Fasi e strumenti dell'indagine statistica	637
7.3.1	Popolazioni, caratteri e modalità	637
7.3.2	Caratteri quantitativi e qualitativi	638
7.3.3	Intensità, frequenze assolute e relative	641
7.3.4	Tabelle e distribuzioni	644
7.3.5	Grafici	645
7.3.6	Grafici per caratteri qualitativi	646
7.3.7	Grafici per caratteri quantitativi discreti	650
7.3.8	Grafici per caratteri quantitativi continui	652
7.3.9	Le fasi di una indagine statistica	655

7.3.10	Analisi statistica univariata.....	657
7.4	Indici di posizione.....	658
7.4.1	La media aritmetica	659
7.4.2	La media geometrica	662
7.4.3	La media armonica	664
7.4.4	La media quadratica	666
7.4.5	Relazione tra le medie algebriche.....	667
7.4.6	La moda	667
7.4.7	La mediana	669
7.4.8	I quantili	673
7.5	Indici di variabilità	674
7.5.1	Campo di variabilità e differenze interquantili.....	675
7.5.2	Scarto semplice medio	675
7.5.3	Devianza.....	677
7.5.4	Varianza e scarto quadratico medio.....	677
7.5.5	Indici di dispersione relativi.....	680
7.5.6	Le differenze medie	681
7.5.7	La concentrazione.....	684
7.6	Indici di forma.....	691
7.6.1	Asimmetria.....	691
7.6.2	Curtosi.....	692
7.7	Rapporti statistici.....	694
7.7.1	Tipologie di rapporti statistici	694
7.7.2	I numeri indici	700
7.7.3	I numeri indici complessi	705

Parte Terza

Fisica

Capitolo 1 - Le grandezze fisiche

1.1	Sistemi di unità di misura	709
1.2	Grandezze scalari e grandezze vettoriali.....	712
1.3	Scomposizione di un vettore	713
1.4	Algebra dei vettori.....	714
1.5	Prodotti vettoriali	715
1.6	Proprietà delle operazioni tra vettori.....	717

Capitolo 2 - Cinematica

2.1	Posizione e traiettoria	719
2.2	Vettore spostamento	720
2.3	Velocità	720
2.4	Accelerazione	721



2.5	Moto rettilineo uniforme.....	722
2.6	Moto uniformemente accelerato	723
2.7	Accelerazione di gravità e caduta libera dei gravi	724
2.8	Moto di un proiettile.....	726
2.9	Moto circolare uniforme	729
2.10	Moto curvilineo non uniforme.....	730
2.11	Moto armonico.....	731

Capitolo 3 - Dinamica

3.1	Prima legge della dinamica (o principio di inerzia).....	733
3.2	Seconda legge della dinamica	733
3.3	Forza.....	734
3.4	Massa	734
3.5	Forza peso	734
3.6	Terza legge della dinamica (o principio di azione e reazione).....	735
3.7	Esempi di problemi dinamici	736
3.7.1	Moto di caduta di un grave.....	736
3.7.2	Moto lungo di un piano inclinato	736
3.7.3	Moto di un corpo sotto l'azione di una forza elastica: il moto armonico.....	738
3.7.4	Moto di un pendolo	739
3.7.5	Moto di un corpo sotto l'azione di una forza centripeta.....	741
3.8	Quantità di moto.....	741
3.9	Impulso di una forza e teorema dell'impulso	742
3.10	Conservazione della quantità di moto	742
3.11	Leggi di Keplero.....	743
3.11.1	Prima legge (legge delle orbite)	743
3.11.2	Seconda legge (legge delle aree)	743
3.11.3	Terza legge (legge dei periodi)	744
3.12	Legge di gravitazione universale	745
3.13	Campo gravitazionale.....	746
3.14	Massa inerziale e massa gravitazionale.....	746
3.15	Forze di attrito	746
3.16	Forze resistenti	748

Capitolo 4 - Lavoro ed energia

4.1	Lavoro	749
4.2	Potenza.....	749
4.3	Lavoro della forza peso	750
4.4	Campo conservativo	751
4.5	Energia potenziale	752
4.6	Energia cinetica.....	752
4.7	Teorema dell'energia cinetica	752
4.8	Principio di conservazione dell'energia meccanica.....	753
4.9	Gli urti.....	755

Capitolo 5 - Statica

5.1	Corpo rigido	757
5.2	Momento di una forza	757
5.3	Coppia di forze	758
5.4	Baricentro	759
5.5	Condizioni di equilibrio	760
5.6	Tipi di equilibrio	760
5.7	Leve e guadagno meccanico.....	761

Capitolo 6 - Meccanica dei fluidi

6.1	Stati di aggregazione della materia	763
6.2	Densità	763
6.3	Peso specifico.....	764
6.4	Pressione	764
6.5	Pressione nei fluidi.....	765
6.6	Legge di Pascal	766
6.7	Legge di Stevino	766
6.8	Principio di Archimede	767
6.9	Principio dei vasi comunicanti	768
6.10	Fluidi in movimento.....	769
6.11	Equazione di continuità.....	769
6.12	Teorema di Torricelli	770
6.13	Teorema di Bernoulli.....	770
6.14	Fluido reale.....	773
6.15	Fenomeni di superficie.....	774

Capitolo 7 - Termologia e Termodinamica

7.1	La temperatura.....	775
7.2	Principio zero	775
7.3	Termometro a mercurio	776
7.4	Scala Celsius ($^{\circ}\text{C}$)	776
7.5	Scala Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$)	776
7.6	Scala Kelvin.....	776
7.7	Dilatazione termica di solidi e liquidi	777
7.8	Dilatazione lineare	777
7.9	Dilatazione cubica	778
7.10	Leggi dei gas perfetti	778
	7.10.1 Prima legge di Gay-Lussac	778
	7.10.2 Seconda legge di Gay-Lussac	779
	7.10.3 Legge di Boyle	780
7.11	Equazione di stato dei gas perfetti.....	781
7.12	Mole	781
7.13	Legge di Dalton.....	782
7.14	Cenni di teoria cinetica dei gas	782



7.15	Gas reali	784
7.16	Il calore	784
7.17	Capacità termica, calore specifico e capacità termica molare	785
7.18	Calorimetro delle mescolanze	786
7.19	Il trasporto di calore	786
7.20	Passaggi di stato	788
7.20.1	La fusione	788
7.20.2	La solidificazione	789
7.20.3	Evaporazione	789
7.20.4	Ebollizione	789
7.20.5	La liquefazione dei gas	790
7.20.6	La sublimazione e il brinamento	791
7.21	Scambi di energia tra un sistema termodinamico e l'ambiente esterno	791
7.22	Primo principio della termodinamica	791
7.23	Lavoro in una trasformazione isobara	792
7.24	Trasformazioni non isobare	792
7.24.1	Trasformazione isocora	793
7.24.2	Trasformazione isoterma	793
7.24.3	Trasformazione adiabatica	793
7.25	Trasformazioni reversibili e irreversibili	794
7.26	Macchine termiche e rendimento	794
7.27	Ciclo di Carnot	795
7.28	Ciclo frigorifero	796
7.29	Entropia	796
7.30	Secondo principio della termodinamica	797

Capitolo 8 - Elettricità

8.1	Eletttrizzazione	799
8.2	Carica elettrica	799
8.3	Principio di conservazione della carica elettrica	799
8.4	Conduttori, isolanti e semiconduttori	799
8.5	Induzione elettrostatica	800
8.6	Legge di Coulomb	800
8.7	Campo elettrico	801
8.8	Campo elettrico generato da una carica puntiforme	802
8.9	Linee di forza del campo elettrico	802
8.10	Carattere conservativo del campo elettrostatico	803
8.11	Energia potenziale elettrica	803
8.12	Potenziale elettrico	804
8.13	Differenza di potenziale elettrico e lavoro delle forze elettriche	804
8.14	L'elettronvolt	805
8.15	Superfici equipotenziali	805
8.16	Flusso del vettore campo elettrico	806
8.17	Teorema di Gauss	806
8.18	Capacità elettrica	807

8.19	Il condensatore e la capacità del condensatore	807
8.20	Collegamento in serie tra condensatori	808
8.21	Collegamento in parallelo tra condensatori.....	809
8.22	Lavoro per caricare un condensatore ed energia accumulata in un condensatore	810
8.23	Corrente elettrica	810
8.24	Legge di Ohm.....	811
8.25	Effetto Joule.....	812
8.26	Generatore elettrico, pila, batteria.....	813
8.27	Circuito elettrico	813
8.28	Amperometro (o galvanometro)	814
8.29	Voltmetro	814
8.30	Collegamento in serie tra resistenze	814
8.31	Collegamento in parallelo tra resistenze	815
8.32	Leggi di Kirchhoff	816
8.33	Corrente elettrica nei liquidi.....	816
8.34	Corrente elettrica nei gas	817

Capitolo 9 - Magnetismo

9.1	Magnete	819
9.2	Campo magnetico	820
9.3	Campi magnetici generati da correnti elettriche.....	821
9.4	Forza di Lorentz	823
9.5	Interazione campo magnetico-corrente elettrica.....	824
9.6	Interazione tra fili percorsi da corrente	824
9.7	Proprietà magnetiche della materia	825
9.8	Elettromagnetismo.....	826
9.9	Generatore di corrente alternata	826

Capitolo 10 - Le onde

10.1	Definizione e classificazione.....	829
10.2	Grandezze caratteristiche di un'onda.....	829
10.3	La funzione d'onda.....	830
10.4	Fronti d'onda.....	831
10.5	Interferenza e principio di sovrapposizione.....	832
10.6	Onde stazionarie	833
10.7	Intensità dell'onda	833
10.8	Riflessione e rifrazione	834
10.9	Diffrazione	835
10.10	Effetto Doppler	835
10.11	Il suono	836
10.12	Onde elettromagnetiche	836
10.13	Spettro delle onde elettromagnetiche	837
10.14	Dispersione	838
10.15	Natura ondulatoria e corpuscolare delle onde elettromagnetiche	838



Capitolo 11 - Cenni di ottica, specchi e lenti

11.1 Specchi sferici.....	839
11.2 Costruzione e caratteristiche di un'immagine fornita da uno specchio sferico	840
11.3 Specchi piani	842
11.4 Diottro.....	842
11.5 Lenti sferiche.....	842
11.6 Costruzione e caratteristiche di un'immagine fornita da una lente	846

Capitolo 12 - Cenni di fisica nucleare

12.1 Nucleo atomico	847
12.2 Isotopi, isobari e isotoni.....	848
12.3 Trasformazioni nucleari.....	848
12.4 Legge del decadimento radioattivo e radioattività	849
12.5 Radiazioni ionizzanti.....	851
12.6 Fissione e fusione nucleare.....	851

Capitolo 6

Successioni e serie numeriche, calcolo differenziale per funzioni di una variabile

6.1 Limite di una funzione

6.1.1 Punti di accumulazione

Dato un valore reale x ed un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, si dice che x è un **punto di accumulazione** per A se ogni intorno di x contiene punti di A distinti da x . Se un punto non è di accumulazione per un insieme, allora viene detto **isolato**.

Esempio

Si consideri l'intervallo aperto $J =]1, 4[$. Il valore $x = 3$ è un punto di accumulazione per l'intervallo J , in quanto, qualsiasi intorno di 3, per quanto piccolo possa essere, contiene punti di J . Difatti il generico intorno di 3 può essere individuato per mezzo di una quantità $\delta > 0$, che può essere resa piccola a piacere. L'intorno di 3 può essere scritto nella forma $]3 - \delta, 3 + \delta[$. Accade sempre che il generico intorno di 3 abbia intersezione non nulla con l'intervallo J .

$$]1, 4[\cap]3 - \delta, 3 + \delta[\neq \emptyset$$

A tal proposito si può confrontare la Figura 1.

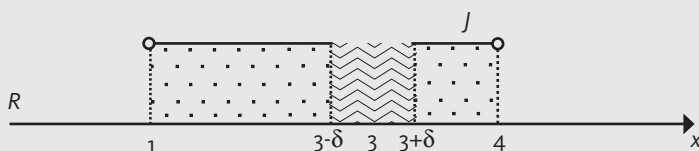


Figura 1

Anche gli estremi dell'intervallo aperto $J =]1, 4[$ sono punti di accumulazione per l'intervallo. Ad esempio, qualsiasi intorno del punto $x = 1$ ha sempre intersezione non nulla con J .

$$]1, 4[\cap]1 - \delta, 1 + \delta[\neq \emptyset$$

Il punto $x = 5$ non è invece un punto di accumulazione per J . Infatti basta scegliere un δ tale che $0 < \delta < 1$ perché l'intorno di 5 costruito come $]5 - \delta, 5 + \delta[$ abbia sempre intersezione nulla con J .

$$]1, 4[\cap]5 - \delta, 5 + \delta[= \emptyset$$

6.1.2 Definizione di limite

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in X con valori reali e sia x_0 un punto di accumulazione di X . Si dice che il limite di $f(x)$ per la variabile indipendente x che tende ad x_0 vale l e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

se per ogni intorno J di l esiste un intorno I di x_0 tale che, considerato un generico x appartenente al dominio X di f e all'intorno I , escluso il punto x_0 , si ha che $f(x)$ cade nell'intorno J di l .

Simbolicamente si scrive:

$$\forall J \in \mathfrak{I}(l) \quad \exists I \in \mathfrak{I}(x_0) \mid f(x) \in J \quad \forall x \in I \cap (X - \{x_0\})$$

Equazione 1

Si può anche fornire una definizione più specifica, in cui si esplicitano le forme degli intorni.

Considerato un numero $\delta > 0$, si può determinare un intorno I di x_0 , che in particolare è $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Questo intorno è tale che per tutti i valori x in esso contenuti, appartenenti al campo di esistenza X , escluso il valore x_0 , si può determinare un $\varepsilon > 0$ per cui risulta soddisfatta la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$ che può anche essere riscritta come $-\varepsilon < f(x) - l < \varepsilon$, da cui si ricava $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$. Da quest'ultima relazione si osserva che il valore $f(x)$ associato ad x cade in un intorno J del valore l , ossia l'intorno $J =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Quindi in termini simbolici, esplicitando la forma degli intorni, l'Equazione 1 può essere riscritta come $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \mid 0 < |x - x_0| < \delta$. L'interpretazione grafica di questa definizione è presentata in Figura 2. Attraverso un $\delta > 0$ si individua lungo l'asse delle ascisse (asse x) un intorno I di x_0 . Partendo da questo intorno, si può determinare, mediante la funzione $f(x)$, un intorno J del valore l , lungo l'asse delle ordinate (asse y). L'intorno J è determinato graficamente in Figura 2 dalle linee tratteggiate che partono da $x_0 - \delta$ e $x_0 + \delta$ e giungono fino ai punti $l - \varepsilon$ ed $l + \varepsilon$. Per qualsiasi valore $x \neq x_0$ contenuto nell'intorno $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, il valore $f(x)$ cade nell'intorno $J =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$. A tale proposito si segua in Figura 2 la freccia che, partendo da x , giunge fino ad $f(x)$. Inoltre è necessario aggiungere che, per quanto si possa considerare piccolo a piacere il valore $\delta > 0$, esso individuerà sempre un intorno di x_0 tale che, per qualsiasi valore x al suo interno, vi sarà il corrispondente valore $f(x)$ che cadrà nell'intorno di l corrispondente sull'asse y .

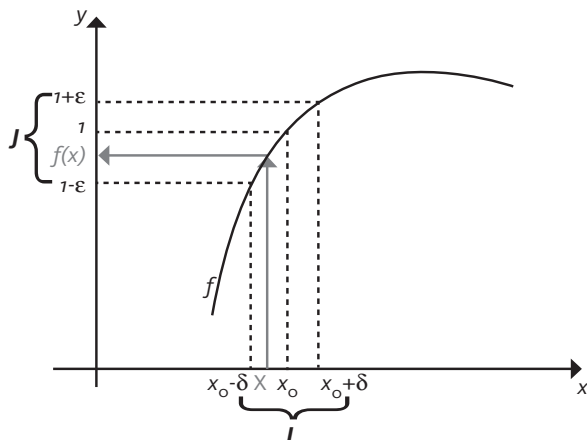


Figura 2

6.1.3 Limiti per funzioni divergenti in un punto

Nel caso in cui, per x che tende ad x_0 , il corrispondente valore di $f(x)$ tende a $+\infty$ (ossia la funzione diverge), allora si può scrivere $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

In tal caso per ogni valore $\delta > 0$ si può determinare un intorno I di x_0 , che in particolare è $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, tale che per tutti i valori x dell'intorno di x_0 appartenenti al campo di esistenza X della funzione f , escluso il valore x_0 , si può determinare un $\varepsilon > 0$ per cui risulta soddisfatta la disequazione $f(x) > \varepsilon$. Da questa disequazione si osserva che il valore $f(x)$ associato ad x cade in un intorno J del valore $+\infty$, ossia l'intorno $J =]\varepsilon, +\infty[$.

In termini simbolici tale asserto si può riassumere sinteticamente come:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) > \varepsilon \quad \forall x \in X \mid 0 < |x - x_0| < \delta$$

L'interpretazione grafica di questo caso è mostrata in Figura 3.

Nel caso in cui, per x che tende ad x_0 , il corrispondente valore di $f(x)$ tende a $-\infty$, allora si può scrivere $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$.

Tale scrittura equivale a dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) < -\varepsilon \quad \forall x \in X \mid 0 < |x - x_0| < \delta$$

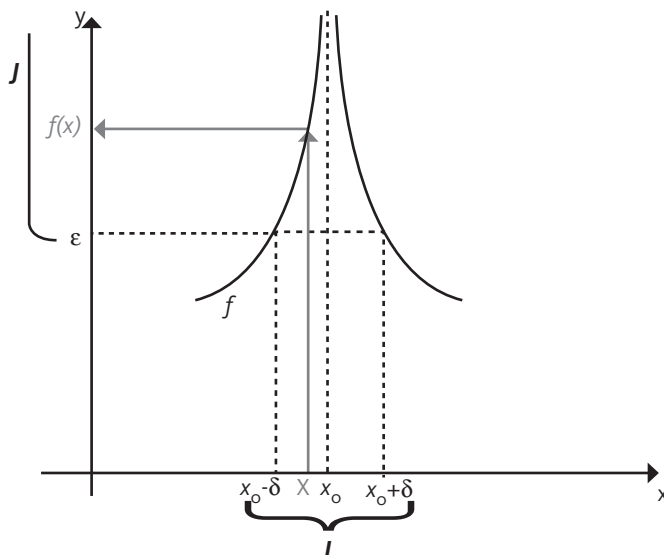


Figura 3

Se, per x che tende a $+\infty$, il corrispondente valore di $f(x)$ tende ad un valore finito l , allora si può scrivere $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.

In tal caso per ogni valore $\delta > 0$ si può determinare un intorno I di $+\infty$, che in particolare è $I =]\delta, +\infty[$, tale che, per tutti i valori $x > \delta$, ossia i valori dell'intorno di $+\infty$ appartenenti al campo di esistenza X della funzione f , si può determinare un $\varepsilon > 0$ per cui risulta soddisfatta la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$, ossia $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

In termini simbolici tale asserto si può riassumere come:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \mid x > \delta$$

L'interpretazione grafica di questo caso è mostrata in Figura 4.

Se, per x che tende a $-\infty$, il corrispondente valore di $f(x)$ tende ad un valore finito l , allora si può scrivere $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.

Tale scrittura equivale a dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \mid x < -\delta$$

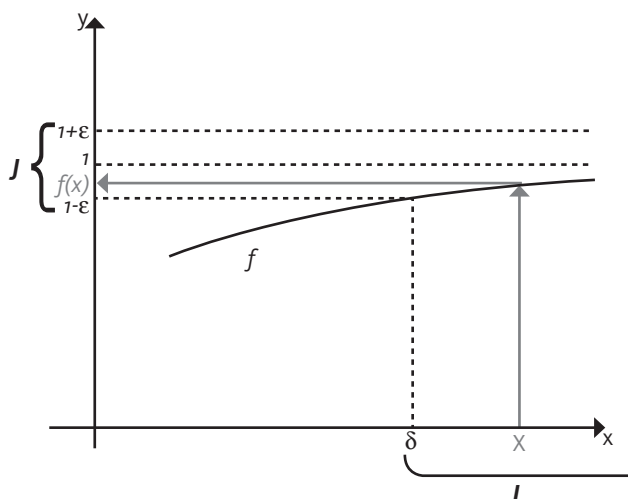


Figura 4

In ultima analisi si presenta il caso in cui per x che tende a $+\infty$, il corrispondente valore di $f(x)$ tende a $+\infty$. Si può quindi scrivere $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Tale scrittura equivale a dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) > \varepsilon \quad \forall x \in X \mid x > \delta$$

Analogamente si può scrivere:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) < -\varepsilon \quad \forall x \in X \mid x > \delta$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) > \varepsilon \quad \forall x \in X \mid x < -\delta$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) < -\varepsilon \quad \forall x \in X \mid x < -\delta$$

6.1.4 Verifica del limite

Operare la verifica di un limite significa constatare che l'asserto stabilito dall'Equazione 1 è vero. Si riportano degli esempi.

Esempi

1) Si verifichi il limite:

$$\lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 - 3) = -1$$

Si considera l'intorno di -1 , ossia $|f(x) - (-1)| < \varepsilon$ dove $\varepsilon > 0$ è un valore piccolo a piacere.

$$\begin{aligned} |f(x) - (-1)| &< \varepsilon \\ |2x^2 - 3 + 1| &< \varepsilon \\ |2x^2 - 2| &< \varepsilon \\ -\varepsilon &< 2x^2 - 2 < \varepsilon \\ -\varepsilon + 2 &< 2x^2 < \varepsilon + 2 \\ \frac{-\varepsilon + 2}{2} &< x^2 < \frac{\varepsilon + 2}{2} \\ 1 - \frac{\varepsilon}{2} &< x^2 < 1 + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Siccome $\varepsilon > 0$ è un valore piccolo a piacere, si può fare in modo che esso risulti tale che $1 - \frac{\varepsilon}{2} > 0$. In tal caso anche $x > 0$, quindi si può applicare la radice quadrata a tutti e tre i membri della disuguaglianza.

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2}} &< \sqrt{x^2} < \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \\ \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2}} &< x < \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

Si è in presenza di un intorno di 1 ; infatti la quantità $\sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}}$ è di poco superiore ad 1 , mentre la quantità $\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2}}$ è di poco inferiore. In particolare, siccome la quantità $\varepsilon > 0$ è piccola a piacere si possono approssimare i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2}} &\approx \sqrt{1} + \delta = 1 + \delta \\ \sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2}} &\approx \sqrt{1} - \delta = 1 - \delta \end{aligned}$$

Si ottiene pertanto:

$$1 - \delta < x < 1 + \delta$$

$$-\delta < x - 1 < \delta$$

$$|x - 1| < \delta$$

Siccome x deve essere supposto diverso da 1, allora si scrive:

$$0 < |x - 1| < \delta$$

La definizione di limite è, pertanto, completa ed il limite è verificato.

2) Si verifichi il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x} = 2$$

Per verificare tale limite occorre dimostrare che, considerato un generico intorno di 2, esiste un intorno di $+\infty$ tale che, qualsiasi valore di x si consideri in tale intorno, accade che $f(x)$ è contenuto nell'intorno di 2. Simbolicamente si può scrivere:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad |f(x) - 2| < \varepsilon \quad \forall x \in X \quad |x| > \delta$$

Si considera inizialmente l'intorno $|f(x) - 2| < \varepsilon$ dove $\varepsilon > 0$ è un valore piccolo a piacere.

$$|f(x) - 2| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2x}{1+x} - 2 \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{2x - 2(1+x)}{1+x} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\cancel{2x} - 2 - \cancel{2x}}{1+x} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{-2}{1+x} \right| < \varepsilon$$

$$\frac{|-2|}{|1+x|} < \varepsilon$$

$$\frac{2}{|1+x|} < \varepsilon$$

Siccome $|1+x| > 0$ si possono moltiplicare ambo i membri per tale quantità mantenendo il segno della disequazione. Inoltre è possibile dividere ambo i membri per $\varepsilon > 0$.

$$\frac{2}{\varepsilon} < |1+x|$$

Tale condizione in valore assoluto equivale a scrivere che:

$$1+x < -\frac{2}{\varepsilon} \text{ oppure } \frac{2}{\varepsilon} < 1+x$$

Queste condizioni possono essere riscritte nel modo seguente:

$$a) x < -1 - \frac{2}{\varepsilon}$$

$$b) \frac{2}{\varepsilon} - 1 < x$$

In particolare, nella condizione *b)* la quantità $\frac{2}{\varepsilon}$ può essere grande a piacere perché ε può essere piccolo a piacere. Di conseguenza posto $\delta = \frac{2}{\varepsilon} - 1$ si può affermare che

tale quantità è grande a piacere. Pertanto la condizione $\frac{2}{\varepsilon} - 1 < x$ diventa $x > \delta$ che rappresenta un intorno di $+\infty$ e il limite è verificato.

Si noti come considerando la condizione *a)* si può porre $\delta = \frac{2}{\varepsilon} + 1$, dove tale quantità può essere grande a piacere. Pertanto la condizione *a)* diventa $x < -\delta$ che rappresenta un intorno di $-\infty$. Da questo si può dedurre che è verificato anche il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{1+x} = 2$$

6.1.5 Limite destro e limite sinistro

Sia $y = f(x)$ una funzione definita in X con valori reali e sia x_0 un punto di accumulazione di X . Si dice che il limite destro di $f(x)$ per la variabile indipendente x che tende a x_0 vale l e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

se in corrispondenza di un numero $\delta > 0$ si può determinare un intorno destro I^+ di x_0 , che in particolare è $I^+ =]x_0, x_0 + \delta[$ tale che, per tutti i valori x dell'intorno destro di x_0 appartenenti al campo di esistenza X , è soddisfatta la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$, ossia $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

In termini simbolici tale asserto si può riassumere sinteticamente come:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[$$

Analogamente, se $y = f(x)$ è una funzione definita in X con valori reali e x_0 è un punto di accumulazione di X . Si dice che il limite sinistro di $f(x)$ per la variabile indipendente x che tende a x_0 vale l e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ che equivale a dire che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[$$

I limiti destro e sinistro sono schematizzati in Figura 5.

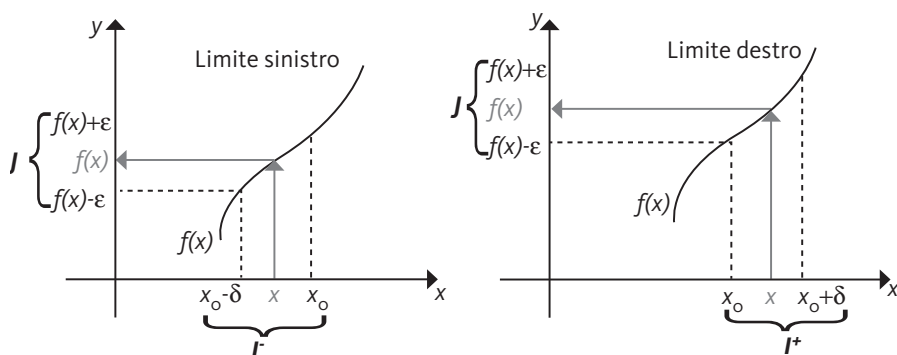


Figura 5

Si supponga ora che la funzione $y = f(x)$ diverga positivamente in x_0 , punto di accumulazione del suo dominio. Si dice che il limite destro di $f(x)$ per la variabile indipendente x che tende ad x_0 vale $+\infty$ e si scrive:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

se in corrispondenza di un numero $\delta > 0$ si può determinare un intorno destro I^+ di x_0 , che in particolare è $I^+ =]x_0, x_0 + \delta[$ tale che, per tutti i valori x dell'intorno destro di x_0 appartenenti al campo di esistenza X , è soddisfatta la disequazione $f(x) > \varepsilon$ dove ε è grande a piacere.

In termini simbolici tale asserto si può scrivere come:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) > \varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[$$

Di seguito si riepilogano gli altri casi nei quali per limite destro o sinistro la funzione diverge positivamente o negativamente.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) > \varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) < -\varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0, x_0 + \delta[$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid f(x) < -\varepsilon \quad \forall x \in X \cap]x_0 - \delta, x_0[$$

Sussiste il seguente teorema.

Teorema 1

Detto X il campo di esistenza di una funzione reale f di variabile reale, se x_0 è un punto di accumulazione a destra e sinistra per X , allora esiste il limite di f in x_0 ed è uguale ad l se e solo se esistono il limite a destra e il limite a sinistra di f in x_0 e sono uguali ad l .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

6.1.6 Teoremi sui limiti

In questo paragrafo si elencano alcuni teoremi sui limiti, che risultano fondamentali per lo sviluppo del calcolo differenziale di funzioni reali di variabile reale.

Innanzitutto è degno di nota il **teorema di unicità del limite**.

Teorema 2

Se una funzione ammette un limite in un punto x_0 o all'infinito, allora tale limite è unico.

Vi sono poi alcuni teoremi sul segno del valore assunto dal limite. Uno di essi è il **teorema della permanenza del segno**.

Teorema 3

Se una funzione f definita in X ha in un punto $x_0 \neq 0$ di accumulazione per X , un limite pari ad l , allora esiste un intorno di x_0 (al più escluso x_0) in cui la f assume valori tutti dello stesso segno di l .

Il seguente teorema fornisce condizioni sufficienti a stabilire che il valore del limite è nullo.



Teorema 4

Se esiste il limite di f in x_0 e se per ogni intorno I di x_0 esistono due punti $x_1, x_2 \in I \cap (X - \{x_0\})$ tali che $f(x_1) \geq 0$ e $f(x_2) \leq 0$, allora risulta $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.

Si passa ora alla rassegna dei teoremi di confronto tra limiti. Di seguito si riportano il **primo e il secondo teorema del confronto**.

Teorema 5

Se esistono i limiti delle funzioni f e g nel punto x_0 e si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, allora esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) > g(x) \quad \forall x \in I \cap (X - \{x_0\})$.

Teorema 6

Se esiste il limite della funzione f nel punto x_0 e si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, allora esiste un intorno I di x_0 tale che $f(x) > \alpha \quad \forall x \in I \cap (X - \{x_0\})$.

Una deduzione analoga si può fare per una funzione che abbia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.

Il **terzo teorema del confronto** è conosciuto anche come **teorema dei carabinieri**.

Teorema 7

Siano f, f_1 ed f_2 tre funzioni definite in X e sia $x_0 \in \hat{R}$ un punto di accumulazione per X .

Se si verifica che $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = l$ e se esiste un intorno I di x_0 dove:

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \quad \forall x \in I \cap (X - \{x_0\})$$

Allora risulta che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Si enuncia il **criterio di convergenza di Cauchy**.

Teorema 8

Condizione necessaria e sufficiente affinché sia $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ è che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un intorno I di x_0 tale che $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad \forall x_1, x_2 \in I \cap (X - \{x_0\})$.

Infine si riporta il teorema del **limite di una funzione composta**.

La collana è rivolta a quanti desiderano acquisire l'**abilitazione all'insegnamento** nelle scuole e devono pertanto superare gli esami di ammissione previsti dalla normativa sulla formazione del personale docente.

Scienze matematiche e fisiche

manuale per prove scritte e orali

Il testo punta ad una trattazione rigorosa ma essenziale, funzionale ad una **rapida revisione** delle conoscenze pregresse e può essere utilmente affiancato dagli eserciziari della stessa collana.

Nella **prima parte** vengono inquadrati gli aspetti ordinamentali correlati all'insegnamento della disciplina così come emergono dalle Indicazioni Nazionali anche nell'ambito delle prescrizioni europee e del sistema di rilevazione internazionale. **Seconda e terza parte** sono rispettivamente dedicate ai **contenuti disciplinari** della **matematica** e della **fisica**.

Il volume è completato da un **software di simulazione** mediante cui effettuare infinite esercitazioni di verifica delle conoscenze acquisite.

Per completare la preparazione:

 **Competenze linguistiche e comprensione testi**
ISBN 9788865846698

 **Scienze naturali, matematiche e fisiche - esercizi commentati**
ISBN 9788865846049

 sfoglia le demo su edises.it

Per essere sempre aggiornato seguici su Facebook 

facebook.com/iltirocinioformativoattivo

Clicca su mi piace  per ricevere gli aggiornamenti.



www.edises.it
info@edises.it



€ 42,00

