

Comprende versione
ebook



Maurizio Spurio

Quesiti ed esercizi svolti di Meccanica Newtoniana

Guida con i passaggi logici, matematici
e discorsivi necessari per arrivare alle soluzioni




EdiSES
EDIZIONI

Accedi ai contenuti digitali

Espandi le tue risorse

un libro che **non pesa**
e si **adatta** alle dimensioni
del **tuo lettore!**



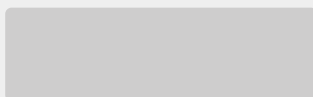
COLLEGATI AL SITO
EDISES.IT

ACCEDI AL
MATERIALE DIDATTICO

SEGUI LE
ISTRUZIONI

Utilizza il codice personale contenuto nel riquadro per registrarti al sito **edises.it** e accedere ai contenuti digitali.

Scopri il tuo **codice personale** grattando delicatamente la superficie



Il volume NON può essere venduto, né restituito, se il codice personale risulta visibile.
L'**accesso ai contenuti digitali** sarà consentito **per 18 mesi**.

Per attivare i **servizi riservati**, collegati al sito **edises.it** e segui queste semplici istruzioni

Se sei registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- inserisci email e password
- inserisci le ultime 4 cifre del codice ISBN, riportato in basso a destra sul retro di copertina
- inserisci il tuo **codice personale** per essere reindirizzato automaticamente all'area riservata

Se non sei già registrato al sito

- clicca su *Accedi al materiale didattico*
- registrati al sito **edises.it**
- attendi l'email di conferma per perfezionare la registrazione
- torna sul sito **edises.it** e segui la procedura già descritta per *utenti registrati*


EdiSES
EDIZIONI



I contenuti digitali sono accessibili dalla propria **area riservata** secondo la procedura indicata nel frontespizio.

Dalla sezione **materiali e servizi** della tua area riservata potrai accedere all'**Ebook**, ovvero la versione digitale del testo in formato PDF. Fruibile mediante l'applicazione gratuita BookShelf, consente una visualizzazione ottimale su lettori e-reader, tablet, smartphone, iphone, desktop, Android, Apple e Kindle Fire.

L'accesso ai contenuti digitali sarà consentito per **18 mesi**.

Maurizio Spurio

Quesiti ed esercizi svolti di Meccanica Newtoniana

Guida con i passaggi logici, matematici e
discorsivi necessari per arrivare alle soluzioni


EdiSES
EDIZIONI

Maurizio Spurio
Quesiti ed esercizi svolti di Meccanica Newtoniana
Guida con i passaggi logici, matematici e discorsivi necessari per arrivare alle soluzioni
Copyright © 2026, EdiSES Edizioni S.r.l. – Napoli

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0
2030 2029 2028 2027 2026

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

A norma di legge è vietata la riproduzione, anche parziale, del presente volume o di parte di esso con qualsiasi mezzo.

L'Editore

L'Editore ha effettuato quanto in suo potere per richiedere il permesso di riproduzione del materiale di cui non è titolare del copyright e resta comunque a disposizione di tutti gli eventuali aventi diritto.

Stampato presso
Vulcanica S.r.l. – Nola (NA)

per conto della
EdiSES Edizioni S.r.l. – Piazza Dante Alighieri, 89 – Napoli

www.edises.it
assistenza.edises.it

ISBN 978 88 3623 262 8

I curatori, l'editore e tutti coloro in qualche modo coinvolti nella preparazione o pubblicazione di quest'opera hanno posto il massimo impegno per garantire che le informazioni ivi contenute siano corrette, compatibilmente con le conoscenze disponibili al momento della stampa; essi, tuttavia, non possono essere ritenuti responsabili dei risultati dell'utilizzo di tali informazioni e restano a disposizione per integrare la citazione delle fonti, qualora incompleta o imprecisa.

Realizzare un libro è un'operazione complessa e, nonostante la cura e l'attenzione poste dagli autori e da tutti gli addetti coinvolti nella lavorazione dei testi, l'esperienza ci insegna che è praticamente impossibile pubblicare un volume privo di imprecisioni. Saremo grati ai lettori che vorranno inviarci le loro segnalazioni e/o suggerimenti migliorativi sulla piattaforma *assistenza.edises.it*

*Agli studenti che hanno già incontrato questi esercizi.
Con l'auspicio di saper trasmettere con entusiasmo ed efficacia quanto
appreso ai loro studenti.*

*Non ho delle pretese,
il merito l'è tutto
della scuola bolognese!
(G. Puccini: Gianni Schicchi, libretto di G. Forzano)*

Alcune note introduttive

Presentazione

Questo manuale di quesiti ed esercizi segue il testo che introduce i concetti e le applicazioni della meccanica classica nel formalismo Newtoniano dello stesso autore e con lo stesso editore. Quel libro (*Meccanica Newtoniana, per un approccio propedeutico alla fisica moderna*) è pensato per studenti di discipline scientifiche e tecnologiche che proseguiranno i loro studi incontrando la fisica moderna. Qui, quesiti ed esercizi presenti al termine di ogni capitolo vengono svolti insieme a tutti i passaggi logici, matematici e discorsivi necessari per arrivare alla soluzione corretta. Non si tratta quindi della semplice indicazione del risultato finale, ma di una guida passo-passo che mostra il percorso (o uno dei possibili percorsi) per risolvere ogni problema proposto.

La raccolta contiene oltre 250 problemi svolti, di cui circa 190 quesiti e oltre 60 esercizi estesi. Lo scopo non è solo quello di preparare lo studente alla prova scritta di Meccanica, o della parte di Meccanica di Fisica Generale I, ma anche quello di indirizzarlo gradualmente ad affrontare un problema di fisica che, in generale e con gradi di difficoltà crescente negli anni, richiede comprensione di un testo, capacità di analizzare i dati, precisione, capacità di sintesi. Dapprima saranno problemi *scolastici*, poi diverranno problemi connessi alla ricerca o al lavoro affrontato.

Gli argomenti trattati sono quelli che tradizionalmente competono a un corso semestrale di almeno 9 CFU, come ormai si sta consolidando al primo anno del corso di laurea in Fisica. La numerazione dei capitoli e quella di ciascun quesito o esercizio segue esattamente quella presente nel testo di teoria, con l'aggiunta di un titolo sintetico. Quesiti ed esercizi che non compaiono in *Meccanica Newtoniana* sono inclusi in fondo a ciascun capitolo e sono contrassegnati con un asterisco iniziale (*).

Differenza tra quesiti ed esercizi.

I **quesiti** si riferiscono a un tema specifico, hanno normalmente un enunciato breve e una sola variabile numerica da determinare, oppure una relazione da dimostrare. I quesiti contenuti in un capitolo richiedono l'utilizzo di grandezze, la comprensione di concetti o relazioni presentati nello stesso capitolo di teoria e servono anche per familiarizzare all'uso di una specifica legge fisica. Essi sono anche propedeutici per i successivi esercizi, in cui vengono talvolta richiamati i procedimenti già presentati nei quesiti. La sequenza degli argomenti (cinematica, forze, equazioni dinamiche per il punto materiale, lavoro ed energia, sistemi di corpi, dinamica dei corpi rigidi, gravitazione, elementi di statica e dinamica dei fluidi) è simile a quella di altri libri di testo; aver studiato su un diverso manuale di teoria non preclude quindi la possibilità di affrontare ciò che è qui presentato. Alcuni quesiti sono estremamente semplici (almeno, per buona parte dei lettori), altri invece sono davvero complessi

ma sempre alla portata dello studente. Talvolta, per la risoluzione del quesito occorre una o più quantità numeriche (ad es., la massa del Sole o della Terra, o il valore di alcune costanti fondamentali) non riportate nel testo, ma che lo studente può facilmente ottenere (anche usando internet). L'origine dei quesiti è varia: alcuni sono miei, altri sono dei colleghi che si sono succeduti nelle esercitazioni del corso di Meccanica a Fisica a Bologna, altri sono famosi e presenti nella letteratura scientifica di riferimento.

Gli **esercizi** hanno una struttura e funzione differente. Essi sono compiti assegnati agli studenti del primo anno del corso di laurea in Fisica a Bologna: due esercizi da risolvere in due ore con l'ausilio di una calcolatrice tascabile e senza alcun testo (e, ovviamente, senza dispositivi collegati a internet). Gli esercizi servono per addestrarsi ad affrontare una prova d'esame scritta. Tutti gli esercizi hanno più punti (domande) in sequenza; in tutti i casi, i punti successivi possono avere bisogno della risposta del punto precedente (ma mai il contrario. Non occorre risolvere il punto 3 per determinare il valore richiesto nel punto 2). La difficoltà è in genere crescente dal punto 1 ai successivi; tutti i dati necessari per la risoluzione sono assegnati nel testo; mai, onde evitare confusione, vengono forniti dati ridondanti, che non servono; gli esercizi possono contenere argomenti oggetto dei capitoli precedenti. Per questo motivo, il Capitolo 12 (sulla dinamica dei corpi rigidi) è quello che ne contiene il numero più elevato. Alcuni esercizi sono miei originali; altri li ho adattati da quelli ereditati dai colleghi che mi hanno preceduto nell'insegnamento della meccanica classica (rispettivamente, il prof. Paolo Capiluppi e il prof. Attilio Forino ¹). Alcuni sono simili a quelli utilizzati per esami in corsi di Fisica a Padova, Roma (La Sapienza), Pisa, Milano (Statale) e che si trovano in rete (e dimostrano come questo testo possa essere utile anche per studenti di varie sedi).

Alcuni concetti più generali o comunque rilevanti sono presentati entro un riquadro. Il riferimento ad alcune dimostrazioni o formule presenti nel testo *Meccanica Newtoniana* sono invece sottolineati. Sia per gli esercizi che per i quesiti, lo svolgimento riportato è sempre mio, e ovviamente possono esserci modi diversi per arrivare allo stesso risultato. Una delle maggiori soddisfazioni provate nella correzione degli scritti è quando uno studente trova un metodo risolutivo più *smart* di quello che avevo pensato. In questo manuale, ho cercato di usare sempre la risoluzione che a mio avviso risulta la più immediata e comprensibile, ma altre sono ovviamente possibili.

Per lo studente: accorgimenti utili per la risoluzione degli esercizi.

Una serie di punti che, in base alla mia esperienza, suggerirei di tenere bene in considerazione per lo svolgimento degli scritti, sia per la parte di Meccanica in Fisica generale I che per quelli degli anni successivi.

¹ Uno degli esercizi proposti è molto simile a quello del mio esame scritto un certo numero di lustri fa, quando la nazionale di calcio partecipava e vinceva i mondiali.

VIII

1. Leggete il testo con molta attenzione e senza fretta, prendendo tutto il tempo necessario. Ogni parola ha un significato preciso. Annotatevi nel foglio le quantità assegnate (dati) convertendoli magari in unità del SI.
2. Possibilmente fate un disegno della situazione (premunitevi per questo di righello, gomma, matita, goniometro, . . .), con frecce che indicano la direzione del moto degli oggetti o le forze applicate ad un punto, etc. Un buon disegno spesso è risolutivo, ma vedo questo aspetto troppo trascurato: spesso il disegno manca, o talvolta l'esito è raccapricciante.
3. Indicate ogni quantità non già definita nell'esercizio (distanza, velocità, forza, . . .) con un simbolo semplice e rappresentatela sul disegno scrivendovi accanto il simbolo che userete per identificarla nelle formule. Evitate pedici e apici troppo elaborati: ad es., non usate $f_{attrito}^{din}$, basta scrivere f_d . Se il testo dice "la massa $m_1 = \dots$ ", non ridefinite m_1 come M , m_a , o altro nome, in quanto induce confusione.
4. Solo dopo aver letto il testo accuratamente, fatto il disegno, definite e annotate le grandezze date e richieste, cercate di capire quali equazioni tra quelle che avete studiato servono a collegare i dati con la grandezza cercata e (se possibile) di intuire cosa succederà al sistema.
5. Non occorre ripartire *ab initio* ogni volta: se ricordate la formula (ad esempio, il periodo di oscillazione di un sistema meccanico) non serve che la ricaviate impostando l'equazione differenziale. Fate uso il più possibile della **verifica dimensionale** delle equazioni che scrivete.
6. Non siete più al liceo: se vi viene richiesta l'equazione del moto, spesso dovete risolvere una equazione differenziale. Quindi, non scrivete automaticamente $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$. Questa vale solo se l'accelerazione a è costante, spesso vero solo se siete nel campo gravitazionale ($a = g$). Ho visto usare relazioni valide solo per il caso del moto uniformemente accelerato in caso di presenza di forze elastiche, o in altre situazioni in cui la forza è variabile, anche da parte di studenti che (nei compiti successivi!) si dimostreranno molto bravi. Questo, perché si ritiene di essere molto preparati da quanto fatto nelle scuole superiori (dove l'uso del calcolo integrale e differenziale applicato alla fisica è limitato).
7. Nel testo, le grandezze **vettoriali** sono indicate con simboli in **grassetto**. Scrivendo a mano, usate le frecce: il vettore \mathbf{F} va indicato come \vec{F} . Se il testo vi richiede "Determinare la forza necessaria bla bla" vi sta chiedendo come risultato un vettore, ossia le tre componenti cartesiane, o intensità direzione e verso. A meno di casi unidimensionali, se volesse solo l'intensità, il testo indicherebbe "Determinare l'intensità della forza necessaria bla bla".
8. Mantenete il più possibile il calcolo simbolico, in modo da poter controllare con l'analisi dimensionale la formula finale. Passata questa ultima verifica, inserite i valori numerici nei dati. Spero siate pratici nell'usare la calcolatrice. Non confondete (ad es.) nel calcolo delle variabili trigonometriche i gradi coi radianti.

9. Il risultato richiesto va riportato in modo che sia evidente (non deve essere nascosto in mezzo alle formule), con **le unità di misura** (una grandezza non adimensionale riportata senza unità di misura corrisponde a un risultato errato!), e approssimato in modo adeguato basandosi sui dati forniti. Se i dati presentano 3 cifre significative (la velocità iniziale è ad es. $v_0 = 3.00$ m/s) significa che la precisione richiesta è dell'ordine del'1%. Non riportate il valore finale come $v_f = 1.9673462$ m/s perché la calcolatrice fornisce quel numero, oppure 2 m/s (che risulta troppo approssimato). Scrivete $v_f = 1.97$ m/s. Per questo, la notazione esponenziale è estremamente utile in moltissimi casi.
10. Non siate prolissi! Molti hanno la tendenza di scrivere temi per giustificare quello che stanno facendo. Non serve argomentare, giustificare con troppo righe di testo, spiegare i passaggi matematici quando sono evidenti. Il problema nella prolissità è che la probabilità di aggiungere una fesseria (per usare una parola che qui posso scrivere) è prossima all'unità. E se una fesseria è presente in uno scritto, è difficile non considerarla; all'orale, si può far finta di non aver sentito.

La modalità con cui sono risolti gli esercizi in questo testo dovrebbe aiutarvi in tutti questi aspetti.

Unità di misure e simboli

Il **Sistema Internazionale di unità di misura** (abbreviato in SI, dal francese *Système International d'unités*) è il sistema di coordinate metriche più utilizzato e raccomandato. Esso si basa su sette grandezze fisiche fondamentali, dalle quali si possono ricavare tutte le altre unità (chiamate derivate). Nel caso della Meccanica, l'uso delle grandezze fondamentali è limitato al metro (m), al secondo (s), al chilogrammo (kg) e alla mole (mol). Sino a qualche anno fa, ma ancora in uso nell'ambito dell'astrofisica e della fisica teorica, era ampiamente utilizzato il sistema CGS (Centimetro-Grammo-Secondo). Come il SI, anche il CGS si basa su unità di lunghezza, massa e tempo. La differenza principale risiede nelle unità di partenza scelte come fondamentali e nella sua struttura matematica, orientata storicamente alla semplificazione di alcune leggi della fisica. Infatti, il CGS differisce profondamente dal SI nel modo in cui tratta l'elettricità e il magnetismo. Nel CGS non esiste un'unità fondamentale per la corrente elettrica (l'Ampere nel SI). La semplificazione che questo comporta nella struttura matematica che descrive l'interazione elettromagnetica nel CGS potrà essere apprezzata da chi continuerà negli studi di fisica fondamentale e nell'astrofisica. Purtroppo, l'uso del GCS è praticamente scomparso dai libri di testo di Fisica Generale 2 per Elettromagnetismo. In Meccanica la differenza tra SI e CGS non è assolutamente rilevante (tutti sanno convertire $1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m}$). Nel testo comunque anche per impratichirsi sono forniti (o richiesti) valori in cm o grammi anziché m e kg.

Ogni sottoinsieme di fisici utilizza delle **unità pratiche**. In fisica atomica le energie sono date in eV, nella fisica nucleare in MeV, e in quella delle alte

energie in GeV o TeV. Le distanze in fisica atomica sono espresse in $\text{Å} = 10^{-10}$ m, in fisica subatomica in $\text{fm} = 10^{-15}$ m, in astronomia in $\text{pc} \approx 3 \cdot 10^{16}$ m. Per questo motivo, in quesiti ed esercizi talvolta sono forniti i fattori di conversione per esprimere le grandezze nelle unità pratiche più congeniali al problema.

Un problema sentito è stato quello della **scelta della notazione (simboli)**: con quale lettera indicare ciascuna delle grandezze fisiche utilizzate. Alla fine, ho deciso di uniformare il più possibile il testo allo standard ISO. Questo è l'acronimo di *International Organization for Standardization*, che indica la più importante organizzazione mondiale per la definizione di norme tecniche. In particolare, adotto lo standard ISO 80000 sulle grandezze e unità di misura. Tuttavia, nella pratica, alcune eccezioni sono necessarie. Talvolta occorre stimare il periodo (simbolo T) partendo dall'energia cinetica (simbolo T) di un oggetto sottoposto a una certa tensione T . In tal caso (ad esempio) posso usare K per l'energia cinetica e τ per la tensione. Una tabella riassuntiva con l'indicazione dei principali simboli utilizzati in questo testo è nella pagina successiva. Scelte diverse di simboli sono possibili, ma il consiglio è di indicare sempre che grandezza rappresenta il simbolo scelto all'inizio della risoluzione.

Ringraziamenti

Intendo ringraziare in maniera particolare la prof.ssa Annarita Margiotta che da qualche anno tiene il corso sdoppiato di Meccanica (e con cui condividiamo le prove scritte). Inoltre, un sentito ringraziamento ai colleghi che hanno contribuito con le esercitazioni del corso di Meccanica a elaborare, modificare, risolvere i quesiti qui proposti. Sono i professori Luigi Guiducci e Filippo Sala, la prof.ssa Federica Fabbri, la dott.ssa Giulia Illuminati, il dr. Nicolò Masi, la dott.ssa Claudia Ciocca, il dr. Marco Tailo.

Gli esercizi proposti sono tutti stati oggetto di prove d'esame: per questo motivo la possibilità di errori è piuttosto piccola, a parte miei possibili errori di trascrizione nel file latex. Tuttavia, nonostante la scrupolosa lettura degli studenti e dei colleghi menzionati, e l'attenzione posta dell'autore, è altamente probabile che qualche errore o imprecisione sia sopravvissuto. Nel caso, sarò grato a chi volesse segnalarmelo.

Maurizio Spurio,
maurizio.spurio@unibo.it.

Bologna, Giugno 2026.

Tabella dei principali simboli utilizzati.

\mathbf{r}	vettore posizione	P	potenza
$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$	versori degli assi cartesiani	T o K	energia cinetica
x, y, z	coordinate cartesiane	V o U	energia potenziale
r, θ, ϕ	coordinate sferiche	ρ	densità volumetrica
r, ϕ, z	coordinate polari cilindriche	σ	densità superficiale
t	tempo	λ	densità lineare
\mathbf{v}	velocità	\mathbf{L}	momento angolare
\mathbf{a}	accelerazione	$\boldsymbol{\tau}$ o \mathbf{M}	momento di una forza
\mathbf{g}	accelerazione di gravità	J	momento d'inerzia
s	ascissa curvilinea	k	costante elastica
$\boldsymbol{\omega}$	velocità angolare	\mathbf{N}	reazione vincolare
$\boldsymbol{\alpha}$ o $\dot{\boldsymbol{\omega}}$	accelerazione angolare	f_a	forza d'attrito
ν	frequenza	μ_s, μ_d	coefficienti attrito
ω	pulsazione	η	viscosità
T	periodo	p	pressione
\mathbf{F}	forza	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	prodotto scalare
\mathbf{p}	quantità di moto	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	prodotto vettoriale
\mathbf{I}	impulso	CM	“centro di massa”
W	lavoro	S.R.	‘sistema di riferimento’
E	energia meccanica		

Indice

1	Grandezze fisiche e unità di misura	1
2	Grandezze vettoriali e operazioni coi vettori	13
3	Cinematica della particella.....	19
4	Le forze e la dinamica del punto materiale	37
5	Sistemi di riferimento in moto relativo.....	57
6	Lavoro ed energia.....	73
7	Dinamica dei sistemi meccanici	101
8	Urti e decadimenti.....	121
9	Riflessioni sul calcolo vettoriale	139
10	La legge di gravitazione universale.....	147
11	Moti dovuti a interazione gravitazionale	165
12	Dinamica dei corpi rigidi	185
13	Riflessioni sull'energia	233
14	Proprietà e dinamica dei fluidi.....	253

Cinematica della particella

3.1 Minima distanza per evitare l'urto tra autovetture. Un'automobile A viaggia su un rettilineo alla velocità costante di $v_A = 75$ km/h. Una seconda automobile B sorraggiunge alla velocità $v_B = 130$ km/h e inizia a frenare inducendo una decelerazione costante $a_B = -9.0$ m/s² quando si trova alla distanza d da A. Determinare la minima distanza d tale da evitare l'urto tra le autovetture.

Trasformiamo le velocità in unità del SI: $v_A = 75$ km/h = 20.83 m/s ; $v_B = 130$ km/h = 36.11 m/s ; $a_B = -9.0$ m/s² = $-a$.

Risolviamo descrivendo il moto tramite le due leggi orarie nel SdR della strada. Fisso $t_0 = 0$ istante in cui B comincia a frenare e stabilisco $x_B(t = 0) = 0$, quindi $x_A(t = 0) = d$. Le due leggi orarie sono

$$\begin{aligned}x_A(t) &= d + v_A t \\x_B(t) &= v_B t - \frac{1}{2} a t^2\end{aligned}$$

Cosa significa "si urtano"? Che nello stesso istante si trovano nella stessa posizione. Chiamiamo l'istante dell'urto t^* , quindi

$$x_A(t^*) = x_B(t^*) \implies d + v_A t^* = v_B t^* - \frac{1}{2} a t^{*2}$$

$$\frac{1}{2} a t^{*2} + (v_A - v_B) t^* + d = 0$$

Le radici di questa equazione possono essere: due distinte (collisione), due coincidenti (quasi-collisione), nessuna (no collisione). Le situazioni elencate corrispondono ai diversi valori del determinante dell'equazione di secondo grado:

$$\Delta = (v_A - v_B)^2 - 2ad$$

ovvero se:

- $\Delta > 0$: urto con velocità relativa non nulla;
- $\Delta = 0$: urto con velocità relativa nulla;
- $\Delta < 0$: nessun urto.

quindi per evitare l'urto le auto dovranno avere una distanza minima

$$d > \frac{(v_A - v_B)^2}{2a} = 13.0 \text{ m}$$

- 3.2 Moto 1D uniformemente accelerato.** Una particella si muove di moto uniformemente accelerato su di una retta. Dopo $t_1 = 4$ s essa ha percorso $s_1 = 60$ m e ha una velocità $v_1 = 33$ m/s. Determinare l'accelerazione e la velocità iniziale.

Scriviamo le equazioni del moto uniformemente accelerato e sostituire le informazioni che si hanno per i due istanti di tempo.

$$\text{In generale } \begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + a t \end{cases} \quad \text{qui } s_0 = 0 \text{ e } \begin{cases} s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v(t) = v_0 + a t \end{cases}$$

Se ora inseriamo nel sistema che al tempo t_1 la particella ha velocità v_1 , la posizione viene ottenuta risolvendo il sistema ed è pari a

$$s_1 = \frac{v_0 + v_1}{2} t_1$$

Da questa relazione possiamo determinare la velocità iniziale:

$$60 = \frac{v_0 + 33}{2} \cdot 4 \implies 60 = (v_0 + 33) \cdot 2 \implies v_0 = -3.0 \text{ m/s}$$

Ricaviamo ora l'accelerazione:

$$v_1 = v_0 + a t_1 \implies 33 = -3 + a(4) \implies a = 9 \text{ m/s}^2$$

- 3.3 Moto rettilineo vario.** La legge oraria del moto di un punto materiale è espressa dalla relazione $x(t) = \alpha t^3 - \beta t^2 - \gamma$, con le costanti α, β, γ reali positive. Determinare velocità e accelerazione. Di che tipo di moto si tratta?

La velocità si ottiene derivando la posizione rispetto al tempo:

$$v(t) = \frac{d}{dt}(\alpha t^3 - \beta t^2 - \gamma) = 3\alpha t^2 - 2\beta t$$

L'accelerazione si ottiene derivando ulteriormente la velocità:

$$a(t) = \frac{d}{dt}(3\alpha t^2 - 2\beta t) = 6\alpha t - 2\beta$$

Poiché l'accelerazione $a(t)$ dipende linearmente dal tempo, il moto non è uniformemente accelerato. Si tratta di un *moto rettilineo vario, con accelerazione variabile*.

- 3.4 Calcolo della gittata di un proiettile.** Determinare la gittata x_G (ossia, la distanza massima raggiunta nel piano orizzontale) di un proiettile lanciato con velocità iniziale v_0 ad un angolo θ . (Il quesito equivale a verificare la relazione eq. 3.30). Si determini anche la quota massima raggiunta nella traiettoria.

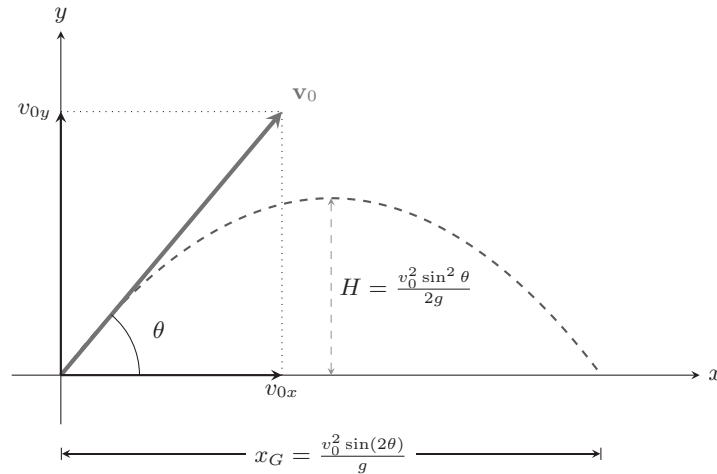


Figura 3.1. Rappresentazione di gittata e massima altezza di un proiettile sparato con velocità iniziale v_0 ad un angolo θ .

Nota: L'esercizio è probabilmente stato svolto dallo studente già nelle scuole superiori, e serve solo a ricordare le leggi del moto nel caso del campo gravitazionale terrestre. Se ne avete abbastanza, passate oltre.

Consideriamo un proiettile lanciato con velocità iniziale v_0 ad un angolo θ . Le componenti della velocità sono:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta, \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

Assumiamo inoltre che il punto di lancio coincida con l'origine del sistema di riferimento (altrimenti basterò usare un sistema di riferimento traslato):

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0.$$

Il moto è uniformemente accelerato e prendendo l'asse y diretto verso l'alto le leggi orarie sono, con le condizioni iniziali date:

$$x(t) = v_{0x} t \tag{E3.1}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t \tag{E3.2}$$

Il tempo di volo t_v si ricava imponendo $y(t) = 0$ nella legge oraria E3.2:

$$0 = (v_0 \sin \theta) t_v - \frac{1}{2} g t_v^2 \implies t_v = \frac{2v_0 \sin \theta}{g}$$

La gittata x_G è la distanza orizzontale E3.1 coperta nel tempo t_v :

$$x_G = v_{0x} \cdot t_v = (v_0 \cos \theta) \left(\frac{2v_0 \sin \theta}{g} \right)$$

Applicando l'identità $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$ si ottiene:

$$x_G = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} \quad (\text{E3.3})$$

L'altezza massima raggiunta corrisponde al massimo valore della coordinata $y(t)$. Dalla figura, si evince che questo avviene all'istante di tempo ¹:

$$t_H = \frac{t_v}{2} = \frac{v_0 \sin \theta}{g}$$

da cui:

$$y_{max} \equiv H = (v_0 \sin \theta)t_H - \frac{1}{2}gt_H^2 \implies H = \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{2g} \quad (\text{E3.4})$$

3.5 Gittata di cannoni a quota diversa. Due cannoni sono collocati nella stessa posizione a quote diverse, h_1 e h_2 . Due proiettili vengono sparati contemporaneamente e orizzontalmente. Calcolare in che rapporto devono stare le due velocità iniziali v_1 e v_2 affinché i due proiettili abbiano la stessa gittata.

Il tempo t_i necessario per raggiungere il suolo ($y(t_i) = 0$) partendo all'istante iniziale $y(0) = h_i$ con velocità $v_y(0) = 0$ si ottiene facilmente dalla E3.2 e dipende solo dall'altezza: $t_1 = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$, $t_2 = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$. Corrispondentemente, la gittata orizzontale x_i per ciascun proiettile è data dal prodotto della velocità per il tempo di volo:

$$x_1 = v_1 t_1 = v_1 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} \quad , \quad x_2 = v_2 t_2 = v_2 \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \quad .$$

Imponendo la condizione $x_1 = x_2$:

$$v_1 \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = v_2 \sqrt{\frac{2h_2}{g}} \implies \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} \quad .$$

Se ad esempio il primo cannone fosse a un'altezza quattro volte superiore al secondo ($h_1 = 4h_2$), il secondo cannone dovrebbe sparare con una velocità doppia rispetto al primo ($v_2 = 2v_1$) per raggiungere lo stesso punto. Dalle relazioni cinematiche, dovrebbe essere intuitivo che l'altezza influenzi la gittata solo sotto radice quadrata.

3.6 Angolo di massima gittata. Verificare che l'angolo di lancio θ che produce la massima gittata corrisponde a 45° . Verificare inoltre che in assenza di attriti, pur se la traiettoria cambia, la gittata rimane la stessa per angoli che differiscano della stessa quantità (in più o meno) dall'angolo di 45° . Verificarlo numericamente per un proiettile sparato ad un angolo $\theta = 30^\circ$ oppure $\theta = 60^\circ$. Nel caso di presenza di attrito con l'atmosfera, per quale angolo tra 30° , 45° e 60° la gittata sarebbe più elevata?

¹ Se non ci credete, osservate che la massima altezza corrisponde alla posizione in cui la derivata della funzione $y(t)$ è nulla. La condizione $\dot{y} = 0$ corrisponde a $v_y = 0$, che si verifica proprio al tempo $t_H = v_0 \sin \theta / g$

La gittata $x_G(\theta) = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g}$ del proiettile è stata ottenuta nel quesito 3.4. Per trovare il massimo, deriviamo rispetto a θ e poniamo uguale a zero:

$$\frac{dx_G}{d\theta} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \cos(2\theta) = 0 \quad \implies \quad \cos(2\theta) = 0 \quad \implies \quad 2\theta = 90^\circ \quad \implies \quad \theta = 45^\circ$$

Dunque, l'angolo di sparo che produce la massima gittata è $\theta = 45^\circ$. Sia $\theta_1 = 45^\circ - \delta$ e $\theta_2 = 45^\circ + \delta$. Notiamo che $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$. L'uguaglianza delle gittate è data da:

$$\sin(2\theta_2) = \sin[2(90^\circ - \theta_1)] = \sin(180^\circ - 2\theta_1) = \sin(2\theta_1)$$

Numericamente per 30° e 60° :

$$\sin(2 \cdot 30^\circ) = \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin(2 \cdot 60^\circ) = \sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Questo dimostra la seconda parte del quesito, circa la simmetria della gittata rispetto l'angolo $\theta = 45^\circ$.

La forza di attrito dell'aria \mathbf{F}_V agisce sempre in direzione opposta al vettore velocità \mathbf{v} . Se un proiettile è lanciato con un angolo θ non troppo elevato, la componente v_x è spesso la componente maggiore per gran parte del volo. Si potrà dimostrare quando conosceremo (dal Cap. 4) come agisce la forza di attrito viscoso. Tra i valori $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$, il valore di 45° garantisce ancora la gittata maggiore, pur essendo sub-ottimale rispetto a un angolo leggermente più basso.

3.7 Un problema inverso della cinematica. Una particella si muove su una retta con accelerazione $a(t) = \alpha t + \beta$, con $\alpha = 18 \text{ m/s}^3$ e $\beta = -8 \text{ m/s}^2$. Calcolare la sua velocità all'istante $t_1 = 3 \text{ s}$ sapendo che la velocità all'istante iniziale è $v_0 = 2 \text{ m/s}$. Determinare lo spazio percorso fra l'istante iniziale e l'istante t_1 .

La velocità si ottiene integrando l'accelerazione:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t (\alpha t' + \beta) dt' = v_0 + \frac{1}{2} \alpha t^2 + \beta t$$

Sostituendo i valori per $t_1 = 3 \text{ s}$ e $v_0 = 2 \text{ m/s}$:

$$v(t_1) = 2 + \frac{1}{2}(18)(3^2) + (-8)(3) = 2 + 81 - 24 = 59 \text{ m/s}$$

Lo spazio percorso si ottiene integrando la velocità:

$$s(t) = \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2} \alpha t'^2 + \beta t') dt' = v_0 t + \frac{1}{6} \alpha t^3 + \frac{1}{2} \beta t^2$$

Sostituendo i valori per $t_1 = 3 \text{ s}$:

$$s(t_1) = 2(3) + \frac{1}{6}(18)(3^3) + \frac{1}{2}(-8)(3^2) = 51 \text{ m}$$

3.8 Profondità di un pozzo dal tempo di volo. Si vuole determinare la profondità h di un pozzo in modo sperimentale. Per questo motivo, si lancia un sasso al suo interno, e si sente il tonfo sul fondo dopo un tempo $\tau = 3.0$ s. La velocità del suono vale $v_s = 340$ m/s. Quanto vale h ?

Il tempo totale τ è dato dalla somma del tempo di caduta t_1 e del tempo di risalita del suono t_2 :

$$\tau = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}$$

Sostituendo i dati $g = 9.81$ m/s², $v_s = 340$ m/s e $\tau = 3.0$ s, otteniamo:

$$\frac{1}{340}h + \sqrt{\frac{2}{9.81}}\sqrt{h} - 3.0 = 0$$

Ponendo $x = \sqrt{h}$:

$$0.00294x^2 + 0.4515x - 3.0 = 0$$

Risolviendo l'equazione di secondo grado per la radice positiva:

$$x \approx 6.377 \implies h = x^2 = 40.7 \text{ m}$$

3.9 Profondità di un pozzo trascurando la velocità del suono. Nel caso del quesito precedente, se si trascurasse l'effetto della velocità finita del suono, h sarebbe più grande o più piccolo? Che errore percentuale si commette?

Se avessimo trascurato il tempo del suono, assumendo infinita la sua velocità (ossia, $t_2 \approx 0$), avremmo ottenuto $h \approx \frac{1}{2}g\tau^2 = \frac{1}{2}(9.81)(3^2) = 44.2$ m. Il pozzo sarebbe sembrato più profondo. L'errore commesso ignorando la velocità del suono sarebbe stato di circa 3.5 metri (quasi il 9%).

3.10 Velocità angolare delle lancette. Determinare la velocità angolare della lancetta delle ore e dei minuti di un orologio (ovviamente, con le lancette e non digitale!). Se alle 3:00 (a.m. o p.m) l'angolo tra la lancetta delle ore e quella dei minuti formano un angolo di 90° , calcolare dopo quanto tempo le lancette sono esattamente sovrapposte.

Determiniamo le velocità angolari $\omega = \frac{2\pi}{T}$ delle due lancette, dove T è il periodo:

- Minuti: $\omega_m = \frac{2\pi}{3600} = \frac{\pi}{1800}$ rad/s
- Ore: $\omega_h = \frac{2\pi}{12 \cdot 3600} = \frac{\pi}{21600}$ rad/s

Alle ore 3:00, il distacco angolare è $\Delta\theta = \frac{\pi}{2}$. La velocità relativa è:

$$\omega_{rel} = \omega_m - \omega_h = \frac{11\pi}{21600} \text{ rad/s}$$

Il tempo t^* necessario affinché la lancetta dei minuti raggiunga quella delle ore è:

$$t^* = \frac{\Delta\theta}{\omega_{rel}} = \frac{\pi/2}{11\pi/21600} = \frac{10800}{11} = 982 \text{ s}$$

Espresso in minuti:

$$t^* = 16 \text{ min e } 22 \text{ s}$$

Le lancette si sovrapporranno alle ore **3:16:22**.

3.11 Una giostra che accelera. Un osservatore è fermo su una giostra a distanza $R = 3$ m dall'asse di rotazione. La giostra, partendo da ferma, comincia a girare con accelerazione angolare costante $\dot{\omega} \equiv \alpha = 0.1$ rad/s². Determinare l'istante di tempo t_1 in cui la giostra raggiunge la velocità angolare di $\omega_1 = 0.1$ giri al secondo e il modulo dell'accelerazione sentita dell'osservatore all'istante t_1 .

Convertiamo dapprima $\omega_1 = 0.1 \times 2\pi = 0.2\pi$ rad/s. La velocità angolare in caso di accelerazione angolare costante è, al tempo t_1 :

$$\omega_1 = \alpha t_1 \implies t_1 = \frac{0.2\pi}{0.1} = 2\pi = 6.28 \text{ s}$$

L'accelerazione totale è la somma vettoriale delle componenti tangenziale, a_t , e centripeta, a_c :

- $a_t = \alpha R = 0.1 \times 3 = 0.3$ m/s²
- $a_c = \omega_1^2 R = (0.2\pi)^2 \times 3 = 1.184$ m/s²

Il modulo dell'accelerazione totale è:

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{0.3^2 + 1.184^2} = 1.22 \text{ m/s}^2$$

3.12 Traiettoria espressa in forma parametrica. Il vettore posizione lungo una traiettoria espressa in termini della distanza scalare s dall'origine è dato dalla relazione $\mathbf{r} = \mathbf{a}s^2 + \mathbf{b}s + \mathbf{c}$, con la condizione che $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Determinare le dimensioni dei vettori \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} e mostrare che la traiettoria è quella di un ramo di parabola che passa per \mathbf{c} . Disegnare la traiettoria.

Affinché l'equazione sia dimensionalmente corretta ($[\mathbf{r}] = L$):

- $[\mathbf{c}] = L$ (vettore posizione iniziale)
- $[\mathbf{b}] = 1$ (vettore adimensionale)
- $[\mathbf{a}] = L^{-1}$ (vettore inverso di una lunghezza)

Per $s = 0$, $\mathbf{r}(0) = \mathbf{c}$, ossia la curva passa per \mathbf{c} . Possiamo prendere un sistema di riferimento (S.R.) traslato $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{c}$ per cui $\mathbf{r}' = \mathbf{a}s^2 + \mathbf{b}s$.

Ora i vettori \mathbf{a} e \mathbf{b} sono \perp (perché $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$); quindi giacciono in un piano, e sono tra loro ortogonali: li prendiamo come giacenti lungo gli assi di un S.R. cartesiano, ossia $\mathbf{a} = a\hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{b} = b\hat{\mathbf{j}}$. Dunque in forma parametrica:

$$\mathbf{r}' = \begin{cases} x = as^2 \\ y = bs \end{cases}$$

Se ricaviamo s dalla seconda: $s = y/b$, ovvero:

$$x = a \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \frac{a}{b^2} y^2$$

Dunque si tratta di una parabola. Poiché s è una distanza scalare e $s \geq 0$, la curva rappresenta un singolo ramo della parabola (Fig. 3.2).

3.13 Moto circolare vincolato. Una particella è vincolata a muoversi su una guida circolare di raggio $R = 3.00$ m, su cui può scorrere senza attrito, secondo la legge

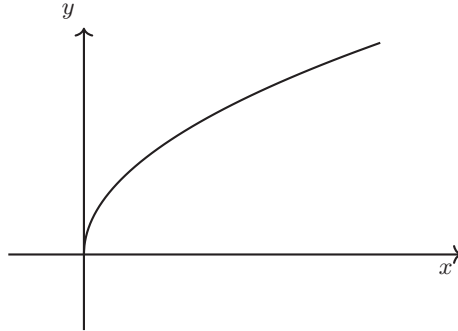


Figura 3.2. Rappresentazione del ramo di parabola nel piano xy traslato dato dalla relazione parametrica $\mathbf{r} = \mathbf{a}s^2 + \mathbf{b}s + \mathbf{c}$, con $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

oraria $s(t) = kt^3$, con $k = 2.0 \text{ m/s}^3$. Calcolare la componente tangenziale a_t e la componente normale a_c dell'accelerazione all'istante $t_1 = 1.0 \text{ s}$.

Data la legge oraria $s(t)$, la velocità è:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3kt^2 \quad \implies \quad v(1.0) = 3(2.0)(1.0)^2 = 6.0 \text{ m/s}$$

L'accelerazione tangenziale (a_t):

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 6kt \quad \implies \quad a_t(1.0) = 6(2.0)(1.0) = 12.0 \text{ m/s}^2$$

L'accelerazione normale (a_c):

$$a_c = \frac{v^2}{R} \quad \implies \quad a_c(1.0) = \frac{6.0^2}{3.00} = 12.0 \text{ m/s}^2$$

Quindi, all'istante $t_1 = 1.0 \text{ s}$, le due componenti dell'accelerazione sono uguali in modulo.

3.14 Raggio di curvatura su traiettoria prestabilita-I. Una particella si muove su una traiettoria prestabilita con la legge oraria $s(t) = kt^2$, con k costante e con modulo dell'accelerazione pari a $a = 2k$. Mostrare tramite l'accelerazione trovata nel caso del moto su traiettoria qualsiasi

$$\mathbf{a} = \dot{v} \hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\boldsymbol{\rho}}$$

(eq. 3.74) che il raggio di curvatura è dato dalla relazione $\rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \dot{s}^2}}$. Mostrare che nel caso in oggetto il moto è rettilineo.

Partendo dalla scomposizione dell'accelerazione, $\mathbf{a} = \dot{s}\hat{\mathbf{t}} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\boldsymbol{\rho}}$, si osserva che il suo modulo quadro è:

$$a^2 = \dot{s}^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2$$

Risolvendo rispetto a ρ :

$$\frac{v^2}{\rho} = \sqrt{a^2 - \ddot{s}^2} \implies \rho = \frac{v^2}{\sqrt{a^2 - \ddot{s}^2}} \quad (\text{E3.5})$$

Nel caso della legge oraria $s(t) = kt^2$ data:

- $v = \dot{s} = 2kt$
- $\ddot{s} = 2k$
- $a = 2k$ (dato dal problema)

Sostituendo nel denominatore del raggio di curvatura:

$$\sqrt{a^2 - \ddot{s}^2} = \sqrt{(2k)^2 - (2k)^2} = 0.$$

Poiché il denominatore è nullo, $\rho \rightarrow \infty$. Un raggio di curvatura infinito indica che la traiettoria è una retta, ovvero il **moto è rettilineo**.

3.15 Raggio di curvatura su traiettoria prestabilita-II. Nel caso considerato nel quesito 3.14, mostrare a cosa corrisponde la traiettoria nel caso il modulo dell'accelerazione fosse $a = 2k\sqrt{1 + (t/T)^4}$, dove $T = \text{cost}$.

I dati del quesito 3.14 corrispondono a una legge oraria: $s(t) = kt^2 \implies v(t) = 2kt$, $\ddot{s} = 2k$ con una accelerazione totale: $a = 2k\sqrt{1 + (t/T)^4}$. La componente normale alla traiettoria dell'accelerazione a_n è data da:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

Usando quindi la E3.5 si ottiene:

$$a_n = \sqrt{a^2 - \ddot{s}^2} = \sqrt{4k^2 \left(1 + \frac{t^4}{T^4}\right) - 4k^2} = \sqrt{4k^2 \frac{t^4}{T^4}} = \frac{2kt^2}{T^2}$$

Il raggio di curvatura ρ si ricava dalla relazione $a_n = v^2/\rho$:

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(2kt)^2}{\frac{2kt^2}{T^2}} = \frac{4k^2 t^2 \cdot T^2}{2kt^2} = 2kT^2$$

Poiché il raggio di curvatura ρ è costante nel tempo, la traiettoria corrisponde a una **circonferenza** di raggio $R = 2kT^2$.

3.16 Traiettoria e distanza percorsa. La legge oraria del moto di una particella è data in coordinate cartesiane dalla relazione $\mathbf{r}(t) = \alpha t^2 \hat{\mathbf{i}} + \beta t^2 \hat{\mathbf{j}}$. Si determini *i*) la traiettoria del moto e *ii*) la funzione scalare $s(t)$ che indica la distanza percorsa al variare del tempo. La condizione iniziale a $t = 0$ è $s(0) = 0$. Verificare la correttezza dimensionale delle equazioni trovate.

Per determinare la traiettoria, le equazioni parametriche sulle coordinate cartesiane sono $x = \alpha t^2$ e $y = \beta t^2$. Eliminando t^2 , ottengo:

$$y = \frac{\beta}{\alpha} x$$

che corrisponde a una **semiretta** uscente dall'origine con pendenza $m = \beta/\alpha$. Per determinare la distanza percorsa, calcoliamo il modulo della velocità:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{(2\alpha t)^2 + (2\beta t)^2} = 2t\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Dunque la distanza scalare $s(t)$, con $s(0) = 0$, è:

$$s(t) = \int_0^t v(t') dt' = \int_0^t 2t' \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} dt' = t^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Infine, la verifica dimensionale: poiché $[\alpha] = [\beta] = LT^{-2}$:

$$[s] = [T^2] \cdot \sqrt{(LT^{-2})^2} = T^2 \cdot LT^{-2} = L$$

L'equazione è dimensionalmente corretta.

3.17 Raggio di curvatura. Una proiettile viene lanciato dalla superficie terrestre con velocità $v_0 = 50.0$ m/s, a un angolo $\theta = 60^\circ$ rispetto alla verticale. Determinare il raggio di curvatura della traiettoria del proiettile nell'istante immediatamente successivo al lancio.

Risulta utile definire l'angolo ϕ rispetto al piano orizzontale: $\theta_{vert} = 60^\circ \implies \phi = 30^\circ$. L'accelerazione normale a_n è la proiezione dell'accelerazione di gravità g sulla direzione perpendicolare alla velocità iniziale, $a_n = g \cos \phi = 9.81 \cdot \cos(30^\circ)$. Il raggio di curvatura è dato dalla relazione:

$$\rho = \frac{v_0^2}{a_n} = \frac{v_0^2}{g \cos \phi} = \frac{50.0^2}{9.81 \cdot 0.866} = 294 \text{ m}$$

Esercizio 3.1

Equazione parametrica della posizione. La posizione di una particella è definita dal vettore posizione

$$\mathbf{r}(t) = \alpha t^3 \hat{\mathbf{i}} + \beta t^2 \hat{\mathbf{j}} + \gamma t \hat{\mathbf{k}}$$

dove numericamente $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\gamma = 1.0$. Determinare:

1. le dimensioni di α, β, γ ;
2. la funzione che descrive i vettori velocità e accelerazione;
3. la velocità scalare media v_m nell'intervallo di tempo compreso tra $t_0 = 0$ s e $t_1 = 2$ s;
4. le componenti normale e tangente dell'accelerazione;
5. il raggio di curvatura ρ al tempo $t = 1$ s.

1. **Dimensioni di α, β, γ .** Affinché l'espressione sia dimensionalmente corretta, ogni termine deve avere le dimensioni di una lunghezza $[L]$.

- $[\alpha t^3] = [L] \implies [\alpha][T]^3 = [L] \implies [\alpha] = \mathbf{LT}^{-3}$ (m/s³)
- $[\beta t^2] = [L] \implies [\beta][T]^2 = [L] \implies [\beta] = \mathbf{LT}^{-2}$ (m/s²)
- $[\gamma t] = [L] \implies [\gamma][T] = [L] \implies [\gamma] = \mathbf{LT}^{-1}$ (m/s)

2. **Vettori velocità e accelerazione.** La velocità $\mathbf{v}(t)$ è la derivata prima della posizione:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 3\alpha t^2 \hat{\mathbf{i}} + 2\beta t \hat{\mathbf{j}} + \gamma \hat{\mathbf{k}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{v}(t) = t^2 \hat{\mathbf{i}} + \sqrt{2}t \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

avendo sostituito coi valori numerici.

L'accelerazione $\mathbf{a}(t)$ è la derivata della velocità:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 6\alpha t \hat{\mathbf{i}} + 2\beta \hat{\mathbf{j}} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{a}(t) = 2t \hat{\mathbf{i}} + \sqrt{2} \hat{\mathbf{j}}$$

3. **Velocità scalare media.** La velocità scalare media v_m tra t_0 e t_1 è definita come il rapporto tra lo spazio totale percorso s e l'intervallo di tempo Δt , vedi riquadro a pag. 30. Calcoliamo il modulo della velocità:

$$|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(t^2)^2 + (\sqrt{2}t)^2 + 1^2} = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = \sqrt{(t^2 + 1)^2} = t^2 + 1$$

Integrando tra 0 e 2:

$$s = \int_0^2 |\mathbf{v}(t)| dt = \int_0^2 (t^2 + 1) dt = \left[\frac{t^3}{3} + t \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3} \text{ m}$$

Quindi:

$$v_m = \frac{14/3}{2} = \frac{7}{3} = \mathbf{2.33 \text{ m/s}}$$

4. **Componenti normale e tangente dell'accelerazione.** L'accelerazione tangenziale è la derivata del modulo della velocità (si veda [eq. 3.74](#)):

$$a_t = \frac{d|\mathbf{v}|}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 + 1) = 2t$$

Per l'accelerazione normale a_n , usiamo la relazione $a^2 = a_t^2 + a_n^2$:

$$|\mathbf{a}(t)|^2 = (2t)^2 + (\sqrt{2})^2 = 4t^2 + 2$$

$$a_n = \sqrt{|\mathbf{a}|^2 - a_t^2} = \sqrt{(4t^2 + 2) - (2t)^2} = \sqrt{2}$$

5. **Raggio di curvatura ρ a $t = 1$ s.** Il raggio di curvatura è legato all'accelerazione normale dalla relazione $a_n = v^2/\rho$ (si veda [eq. 3.74](#)):

$$\rho = \frac{v^2}{a_n}$$

A $t = 1$ s:

- $v(1) = 1^2 + 1 = 2 \text{ m/s}$
- $a_n(1) = \sqrt{2} \text{ m/s}^2$

Dunque il valore del raggio di curvatura da determinare:

$$\rho = \frac{2^2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} = \mathbf{2.83 \text{ m}}$$

Maurizio Spurio

Quesiti ed esercizi svolti di Meccanica Newtoniana

Guida con i passaggi logici, matematici
e discorsivi necessari per arrivare alle soluzioni

Accedi ai contenuti digitali > Espandi le tue risorse > con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere ai **contenuti digitali**.
L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.


EdiSES
EDIZIONI

