



Semestre Filtro  
2026-2027

D. Scannicchio

# Fisica Generale e Biomedica

Manuale conforme al Syllabus  
per il semestre filtro 2026-2027

II Edizione



*Eddie*

l'assistente virtuale  
per sintesi e quiz



**APPEXAM  
MANAGER**  
con migliaia  
di quiz di Fisica



Versione **Ebook**

**EdiSES**  
EDIZIONI



# I fondamenti della Meccanica

## Parte III: Elementi di Statica e di Dinamica rotatoria. Corpi deformabili e attrito



### 5.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo vengono svolte le principali nozioni di *Statica* (dei corpi rigidi e dei corpi deformabili), indispensabili per stabilire lo stato di equilibrio delle articolazioni e le modalità di frattura delle strutture ossee, e i principali aspetti della *Dinamica rotatoria*, che, in aggiunta alla *Dinamica traslatoria* (trattata nei capitoli precedenti), permette di comprendere nel seguente Capitolo 6 alcuni fenomeni biologici come le fratture, la deambulazione e la percezione delle rotazioni.

È opportuno rilevare che la Dinamica rotatoria diventa importante solo in determinati casi, poiché le *energie di rotazione sono trascurabili rispetto a quelle di traslazione*: infatti è molto più facile porre in rotazione un corpo che farlo in moto di traslazione, come risulta evidente dai moti dimostrativi dei corpi in assenza di peso sulla Stazione Spaziale Internazionale.

Per questo motivo, e per la sua intrinseca complessità formale, il paragrafo relativo ai moti di rotazione con alcuni Esempi costituisce un approfondimento in questo testo consultabile scansionando il corrispondente QR alla fine del §5.5.

Infine, come già scritto nell'introduzione del Capitolo 3, questo capitolo termina svolgendo alcune nozioni relative ai corpi deformabili e alle forze di attrito, nozioni indispensabili alla comprensione delle applicazioni della Meccanica ai sistemi biologici (Capitolo 6).

### 5.2 EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

Prima di considerare le condizioni di equilibrio dei corpi, introduciamo la definizione di *momento di una forza rispetto ad un punto O*. Consideriamo un corpo rigido, cioè che non si possa deformare, quale che sia l'entità delle forze che agiscono su di esso, sul quale agisce una forza  $\mathbf{F}$  applicata nel punto A e un punto O *qualsiasi*, come mostrato in Figura 5.1. Si definisce *momento M di una forza* (chiamato anche *momento torcente*) *rispetto al punto O* il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{M} = \overline{\mathbf{OA}} \wedge \mathbf{F} \quad (5.1)$$

dove  $\overline{\mathbf{OA}}$  è il vettore distanza diretto da O ad A. Il modulo del vettore  $\mathbf{M}$  è fornito da:

$$M = F \overline{\mathbf{OA}} \sin \phi = F b \quad (5.2)$$

dove abbiamo indicato con  $\phi$  l'angolo fra i vettori e con  $b$  la distanza della retta d'azione della forza  $\mathbf{F}$  dal punto O (Figura 5.1);  $b$  prende il nome di braccio della forza rispetto al punto O. Dalla definizione di prodotto vettoriale (§2.5c), osservando la Figura 2.10 e immaginando che il punto O sia fisso e che A sia rigidamente collegato ad O, si vede che solo nel caso in cui il momento della forza è diverso da zero (cioè  $b \neq 0$  e  $\sin \phi \neq 0$ ), la forza tende a produrre una rotazione di A intorno

Momento di una forza, momento torcente

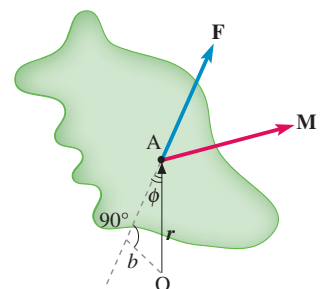


Figura 5.1

Momento  $\mathbf{M}$  della forza  $\mathbf{F}$  rispetto al punto arbitrario O.

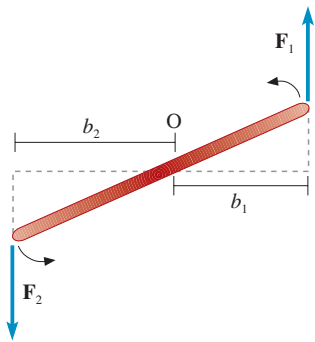


Figura 5.2

Pur essendo soddisfatta la condizione di equilibrio traslazionale  $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2$ , l'asta possiede un momento diverso da zero:

$$M = F_1 b_1 + F_2 b_2,$$

che ne causa la rotazione.

---

Equilibrio traslazionale

---

Equilibrio rotazionale

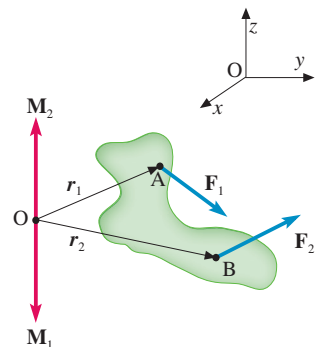


Figura 5.3

L'equilibrio del corpo è soddisfatto se:  $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$  e  $\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = \mathbf{O}\mathbf{A} \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{O}\mathbf{B} \wedge \mathbf{F}_2 = \mathbf{r}_1 \wedge \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \wedge \mathbf{F}_2 = 0$ .

Figura 5.4

La forza peso  $\mathbf{P}$  non fa sprofondare nel piano il corpo a causa della reazione vincolare  $\mathbf{N}$  del piano. Il corpo resta in equilibrio sul piano poiché  $\mathbf{P} + \mathbf{N} = 0$  e il momento di ciascuna forza è nullo (prendendo come punto O arbitrario uno dei punti di applicazione di  $\mathbf{N}$  e di  $\mathbf{P}$ ).

no ad O. Dalla definizione, il momento di una forza si misura nel Sistema Internazionale in *newton metro* (N m). Il momento di una forza, quindi, possiede le stesse dimensioni del lavoro meccanico. Per distinguere le due grandezze il lavoro meccanico viene misurato sempre in joule (J), il momento di una forza in newton metro (N m).

Limitiamoci ora a considerare le condizioni di equilibrio di *un punto materiale* sottoposto a più forze e di *un corpo non puntiforme*, ma supposto *rigido*, sotto l'azione di forze ad esso applicate.

La *condizione di equilibrio per un punto materiale* è che la somma vettoriale di tutte le forze ad esso applicate dia luogo ad una risultante  $\mathbf{R}$  nulla, cioè ad una forza di modulo zero:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{F}_i = \mathbf{R} = 0. \quad (5.3)$$

Nel caso invece che si tratti di un *corpo rigido di dimensioni finite*, la condizione (5.3) non è più sufficiente per assicurare l'equilibrio del corpo, perché questo potrebbe compiere dei moti rotatori, come nel caso di due forze uguali ed opposte, ma aventi rette d'azione parallele (Figura 5.2). Alla condizione (5.3), detta di *equilibrio traslazionale*, bisogna aggiungere la condizione che la risultante  $\mathbf{M}_T$  dei momenti di tutte le forze applicate al corpo, calcolati rispetto ad un unico punto O *arbitrario* (Figura 5.3), sia pure essa nulla (condizione di *equilibrio rotazionale*):

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + \dots = \sum_i \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_T = 0. \quad (5.4)$$

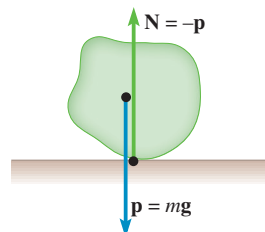
Le due condizioni di equilibrio per i corpi rigidi (5.3) e (5.4) sono relazioni vettoriali, le quali, tramite le componenti lungo  $x$ ,  $y$  e  $z$  dei vettori, corrispondono a  $3 + 3 = 6$  relazioni scalari, che devono essere contemporaneamente soddisfatte per poter garantire l'equilibrio, come si vedrà in un caso particolare nel §5.5.

### 5.3 I VINCOLI E LE LEVE

Può accadere che la mobilità di un corpo sia limitata dalla presenza di qualche *vincolo*. I vincoli fissi ideali sono elementi che non si spostano, né si deformano sotto l'azione di forze. Ne è un esempio pratico il *piano orizzontale* su cui è poggiato un corpo: la forza peso che agisce sul corpo è bilanciata dalla *forza di reazione del vincolo*, uguale ed opposta, per cui il corpo resta in equilibrio (Figura 5.4). Altri esempi sono gli assi di rotazione di pendoli, ruote, eliche e così via.

Nel caso particolare in cui il corpo rigido sia vincolato in *un punto*, le condizioni di equilibrio sono semplificate. Infatti la risultante  $\mathbf{R}$  delle forze del corpo potrà essere sempre in teoria equilibrata dalla reazione del vincolo. Questo significa semplicemente che, se il corpo è vincolato in un punto, la condizione di equilibrio rispetto ad un moto traslatorio è automaticamente soddisfatta. Quindi condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo vincolato in un punto è la sola condizione (5.4) di equilibrio rotazionale.

Se il corpo è invece libero di ruotare intorno ad un asse fisso, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che sia nulla la somma vettoriale delle proiezioni sull'asse di rotazione dei momenti delle forze applicate al corpo.



Un'asta rigida, chiamata *leva*, girevole intorno ad un asse perpendicolare all'asta stessa, detto *fulcro*, è il sistema meccanico (o macchina) più semplice mediante il quale è possibile fare equilibrio con una forza  $F_m$ , detta motrice, applicata a uno dei suoi punti (M), ad un'altra forza  $F_r$ , detta resistente, applicata a un altro suo punto (R), come mostrato nella Figura 5.5. Nella semplice ipotesi che le due forze agiscano in un piano perpendicolare al fulcro (Figura 5.5), l'equilibrio si ottiene quando i momenti delle due forze sono uguali ed opposti, cioè quando:

$$b_m F_m - b_r F_r = 0,$$

da cui:

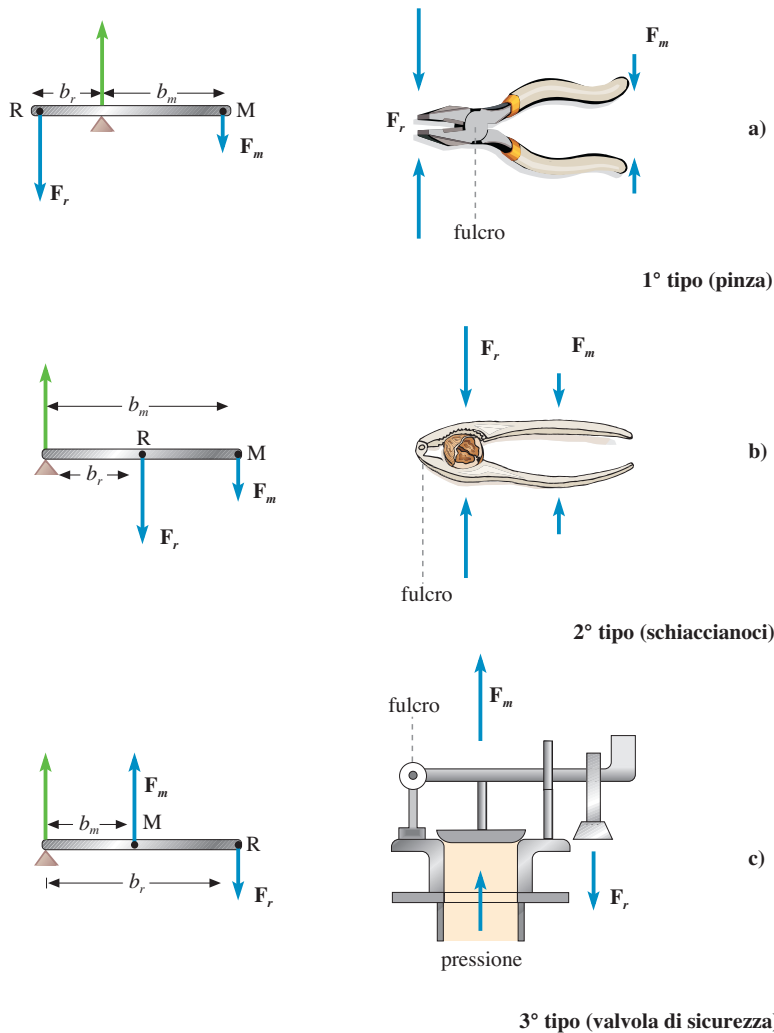
$$b_m F_m = b_r F_r, \quad (5.5)$$

dove  $b_r$  e  $b_m$  sono rispettivamente i bracci della forza motrice e della forza resistente, eseguendo il calcolo dei momenti rispetto al fulcro (il fulcro è il punto arbitrario O).

Il rapporto adimensionale:

$$G = \frac{F_r}{F_m} = \frac{b_m}{b_r}, \quad (5.6)$$

esprime il *guadagno meccanico* che si può realizzare con la leva.



**Figura 5.5**

(a) Leva del 1° tipo: pinza. (b) Leva del 2° tipo: schiaccianoci. (c) Leva del 3° tipo: valvola di sicurezza. Per completezza, in questa e nelle successive figure relative alle leve, viene rappresentata la forza di reazione vincolare applicata al fulcro che deve soddisfare l'equilibrio traslazionale del sistema.

3 tipi di leva

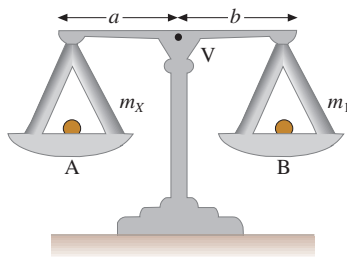
Come mostrato nella Figura 5.5, esistono tre tipi di leve a seconda della posizione del fulcro rispetto ai punti di applicazione delle forze.

Con le leve del 1° tipo (Figura 5.5a, fulcro intermedio fra R ed M) si può avere un guadagno sia maggiore sia minore di uno. La pinza è un esempio di leva del primo tipo.

Le leve del 2° tipo (Figura 5.5b, R intermedio fra fulcro ed M) hanno un guadagno sempre maggiore di uno (perciò si dicono vantaggiose). Lo schiaccianoci o la carriola sono tipici esempi di leva del 2° tipo.

Nel caso delle leve del 3° tipo (Figura 5.5c, M intermedio fra fulcro ed R), il guadagno  $G$  è sempre minore di uno (leve svantaggiose). Ne è un esempio la valvola di sicurezza di tipo meccanico mostrata in Figura 5.5c. Vedremo nel §6.3 e nel §E6.2 (consultabili scansionando i corrispondenti QR) alcune applicazioni delle leve al corpo umano.

### Bilancia



**Figura 5.6**

La bilancia: V è il fulcro dei due bracci di lunghezza  $a$  e  $b$  che sostengono i piattelli A e B su cui porre la massa incognita e la massa equilibratrice (costituita da masse tarate con precisione).

A conclusione di questo paragrafo consideriamo due leve del 1° tipo di uso comune: **la bilancia** (Figura 5.6) e **la carrucola** (Figura 5.7). Per la bilancia, trattandosi di un sistema vincolato, girevole intorno ad un asse passante per il fulcro V, per quanto detto sopra, la condizione (5.3) è automaticamente soddisfatta, mentre la condizione (5.4) si riduce ad un'equazione scalare. Indicata con  $m_x$  la massa incognita situata sul piattello A e con  $m_1$  la massa equilibratrice collocata sul piattello B si ottiene:

$$m_x g a = m_1 g b \quad \text{da cui} \quad m_x = m_1 \frac{b}{a}, \quad (5.7)$$

dove  $a$  e  $b$  sono i bracci, rispetto al fulcro V, della forza peso incognita  $m_x g$  e della forza peso equilibratrice  $m_1 g$ .

Se le lunghezze dei bracci della bilancia fossero uguali, la (5.7) fornirebbe il valore della massa incognita uguale al valore di quella equilibratrice. In realtà, per quanto accurata possa essere l'esecuzione del costruttore, le lunghezze  $a$  e  $b$  dei bracci non possono essere mai esattamente uguali, per cui, per determinare con elevata precisione il valore della massa incognita  $m_x$ , è necessario procedere nel modo seguente (**metodo della doppia pesata**).

Si effettua una seconda pesata, ponendo la massa incognita  $m_x$  sul piattello B e la nuova massa equilibratrice  $m_2$  sul piattello A:

$$m_x g b = m_2 g a \quad (5.8)$$

e moltiplicando membro a membro la (5.8) per la (5.7) si ottiene:

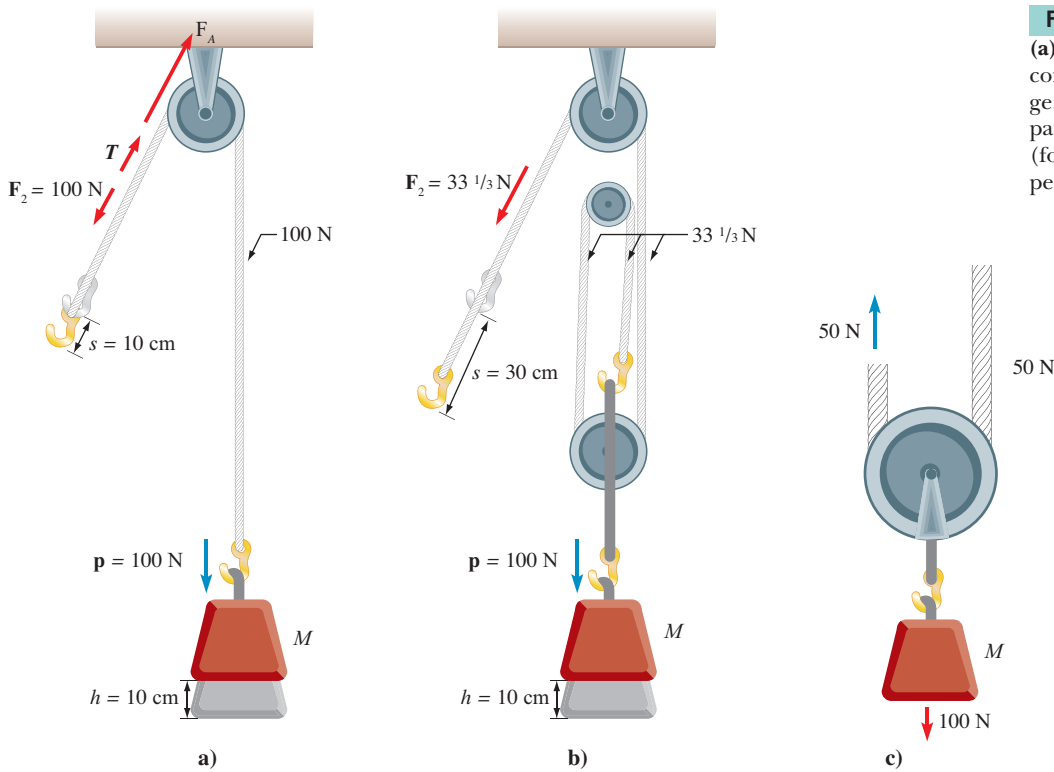
$$m_x = \sqrt{m_1 m_2}, \quad (5.9)$$

che è la media geometrica fra le due masse equilibratrici. Questa può essere sostituita dalla media aritmetica  $m_x = (m_1 + m_2)/2$ , dato che le due masse  $m_1$  e  $m_2$  differiscono molto poco tra loro.

Un'altra leva del 1° tipo di uso comune è la carrucola fissa (Figura 5.7a), dove l'asse di rotazione della carrucola è il fulcro e il suo raggio costituisce i bracci. In vista delle applicazioni biologiche riportate nel §6.3 è opportuno ricordare che una **carrucola** in generale è una macchina semplice adatta al sollevamento di carichi, mentre la **puleggia** è un organo di trasmissione costituito da un disco che ruota intorno al proprio asse.

Come si vede dalla figura, in assenza di forza di tensione della corda  $T$  e di forza di attrito carrucola-corda  $F_A$ , la forza peso resistente  $\mathbf{p}$  e la forza motrice  $\mathbf{F}$  sono uguali e il guadagno (5.6) è uguale a uno. La tensione e la forza di attrito, entrambe opposte alla forza motrice  $\mathbf{F}$ , in realtà non sono nulle e il guadagno risulta quindi maggiore di uno.

### Carrucola e puleggia



**Figura 5.7**

(a) Carrucola fissa. (b) Carrucola composta (paranco) con 3 pulegge: comporta una forza motrice pari a  $1/3$  della forza resistente (forza peso). (c) Carrucola mobile per la quale il guadagno è  $G \geq 2$ .

La carrucola composta (Figura 5.7b) permette di amplificare in modo notevole la forza muscolare, per sollevare ad esempio elementi architettonici come colonne, obelischi e blocchi di marmo e per tirare navi in secca. La stessa cosa avviene con la carrucola mobile mostrata in Figura 5.7c, dove la corda è fissata in un punto e la puleggia si muove.

### 5.4 CENTRO DI MASSA E BARICENTRO

Consideriamo un sistema di più particelle, avente massa complessiva pari a:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum_i m_i, \quad (5.10)$$

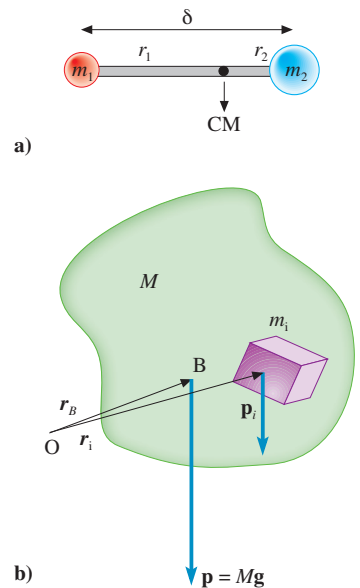
dove  $m_i$  è la massa della  $i$ -esima particella. Sia  $r_i$  il vettore posizione della  $i$ -esima particella riferito a un'origine arbitraria. La posizione del **centro di massa** (CM) del sistema, rispetto alla stessa origine, è rappresentata dal vettore  $r_{CM}$  definito da:

$$M r_{CM} = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \dots = \sum_i m_i r_i. \quad (5.11)$$

Nel caso di 2 particelle la (5.11) diventa:

$$r_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M} r_1 + \frac{m_2}{M} r_2, \quad (5.12)$$

mentre nel caso di un corpo di dimensioni finite, questo può essere suddiviso in tanti volumetti  $i$ -esimi adiacenti (Figura 5.8b), diventando così un sistema a molte particelle cui applicare la (5.11) a coppie successive.



**Figura 5.8**

(a) Sistema a due corpi. (b) Sistema a molte particelle: un corpo di dimensioni finite di massa  $M$  può essere suddiviso in tante parti (cubetti elementari di massa  $m_i$ ) su cui agisce la forza peso  $p_i$ . La coordinata del baricentro si calcola utilizzando la relazione (5.13). La forza peso complessiva del corpo  $p = Mg$  viene applicata al baricentro B.

Più correttamente per un corpo di dimensioni finite si impiega il calcolo integrale con cui le relazioni (5.10) e (5.11) diventano rispettivamente:

$$M = \int_M dm = \int_V d(r) dV, \quad (5.10a)$$

dove  $d = d(r)$  è la densità del corpo:

$$M \mathbf{r}_{CM} = \int_V d(r) \mathbf{r} dV. \quad (5.11a)$$

Nel caso di un sistema a due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  distanti tra loro  $\delta$  (vedi Figura 5.10) il centro di massa è dato dalla (5.12); scegliendo l'origine del sistema di riferimento nel centro di massa,  $r_{CM} = 0$ , per cui la (5.12) diventa:

$$m_1 (-r_1) + m_2 r_2 = 0,$$

che diventa:

$$r_1/r_2 = m_2/m_1, \quad (5.12a)$$

da cui, essendo  $r_1 + r_2 = \delta$ , si ricavano facilmente le distanze  $r_1$  e  $r_2$ .

La forza peso che agisce su un corpo di massa  $M$ , sottoposto all'azione della gravità, è la risultante di tante forze di gravità elementari quante sono le particelle materiali di cui è costituito il corpo. Si definisce **centro di gravità**, o **baricentro**, di un corpo il punto di applicazione della forza peso che agisce su di esso. Formalmente esso è definito dalla coordinata  $\mathbf{r}_B$  data dalla seguente relazione, analoga alla (5.11):

$$Mg \mathbf{r}_B = m_1 g \mathbf{r}_1 + m_2 g \mathbf{r}_2 + m_3 g \mathbf{r}_3 + \dots = \sum_i m_i g \mathbf{r}_i, \quad (5.13)$$

dove  $Mg$  è il modulo della forza peso complessiva e  $m_i g$  sono i moduli delle forze peso agenti sulle singole particelle di cui è composto il corpo.

Come detto sopra, più correttamente per un corpo di dimensioni finite si impiega il calcolo integrale con cui la relazione (5.13) diventa (Figura 5.8b):

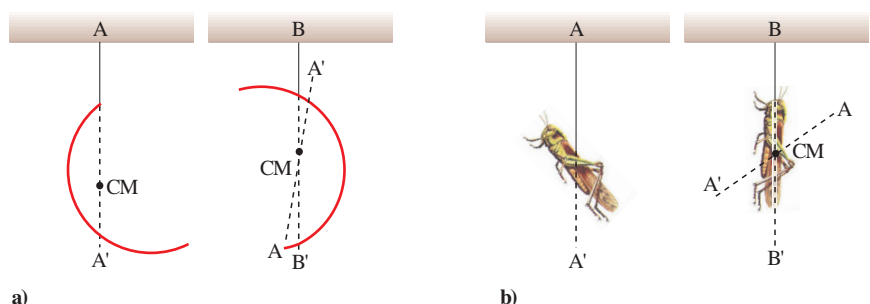
$$M g \mathbf{r}_B = \int_V d(r) g \mathbf{r} dV. \quad (5.13a)$$

Il centro di massa, definito dall'equazione (5.11), coincide con il baricentro (5.13) solo se l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  è la stessa per ciascuna particella del sistema e questo è praticamente sempre vero per i sistemi biologici.

Il baricentro di un corpo può essere facilmente individuato sperimentalmente usando metodi di bilanciamento. Ad esempio il baricentro di un'asta è individuato dal punto in cui essa è in equilibrio su un perno. Similmente, se si sospende un oggetto ad un perno attorno a cui è libero di ruotare, quando l'oggetto è in equilibrio stabile, il baricentro si troverà sulla verticale che passa per il perno, sotto di esso: sospendendo il corpo in un altro punto si può individuare il baricentro, come mostrato nei casi di Figura 5.9. L'Esempio E1.2 riporta il calcolo del centro di massa di un semianello.

**Figura 5.9**

(a) Il baricentro di un semicerchio si può individuare sperimentalmente, sospendendolo da due punti diversi e (b) in modo simile si individua il baricentro della locusta. Per la terza coordinata si deve sospendere la locusta lateralmente. CM = centro di massa.



**ESEMPIO 5.1** Centro di massa di due corpi

Calcolare la posizione del centro di massa dei due corpi puntiformi mostrati in Figura 5.10. La distanza tra i due corpi è  $d = 20$  cm e le masse sono  $m_1 = 4$  kg e  $m_2 = 8$  kg. Assumere che le due masse siano puntiformi.

**Soluzione** Ponendo l'origine del sistema di riferimento cartesiano  $x, y, z$  nel centro di massa (CM) e indicando con  $r_1$  e  $r_2$  rispettivamente le coordinate (in  $y$ ) delle due masse, abbiamo una massa totale  $M = 4$  kg +  $8$  kg =  $12$  kg. Dalla definizione di centro di massa (5.11) applicata al caso proposto di due soli corpi abbiamo:

$$M r_{\text{CM}} = m_1 r_1 + m_2 r_2.$$

Questa relazione vettoriale può essere scritta in forma scalare osservando che il centro di massa si trova in un punto della congiungente le due masse, che individua l'asse  $y$ . Gli altri due assi  $x$  e  $z$  forniscono valori nulli per le coordinate  $x_{\text{CM}}$  e  $z_{\text{CM}}$ . Abbiamo dunque:

$$M r_{\text{CM}} = m_1 (-r_1) + m_2 r_2.$$

Le coordinate  $x, y, z$  del centro di massa hanno valore zero, essendo il centro di massa l'origine del sistema di coordinate. Abbiamo allora:

$$m_1 (-r_1) + m_2 r_2 = 0.$$

Inoltre, abbiamo  $|r_1| + |r_2| = d = 20$  cm. Ottenendo  $|r_2| = 20$  cm -  $|r_1|$  e introducendola nella relazione precedente si ottiene:

$$-m_1 r_1 + m_2 (20 \text{ cm} - r_1) = (m_2 - m_1) r_1 + 20 m_2 = 0$$

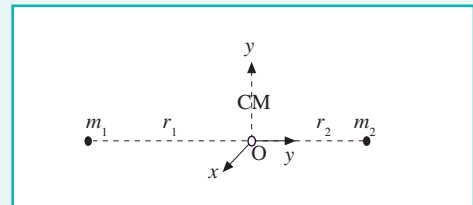
da cui:

$$r_1 = -13.33 \text{ cm} \quad \text{e}$$

$$r_2 = d - |r_1| = 20 \text{ cm} - 13.33 = 6.67 \text{ cm}.$$

Come era prevedibile, il centro di massa è spostato verso la massa maggiore  $m_2$ . Il centro di massa in caso siano presenti un terzo corpo di massa  $m_3$  o ulteriori corpi si ottiene eseguendo lo stesso procedimento tra il centro di massa dei primi due corpi (sempre puntiformi) e il terzo corpo e così via per eventuali altre masse.

Nel caso di corpi estesi è necessario impiegare il calcolo integrale per ottenere la massa totale e la posizione del centro di massa per ogni singolo corpo esteso.



**Figura 5.10**

Il sistema di riferimento  $x, y, z$  viene posto nel centro di massa (CM) delle due masse puntiformi.

## 5.5 CENNI DI DINAMICA ROTATORIA

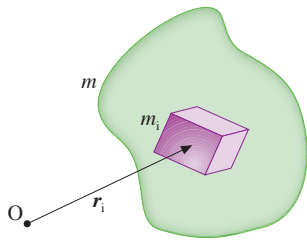
Oltre a traslare un corpo rigido può ruotare. In generale le rotazioni avvengono intorno ad un asse e sono caratterizzate da una variazione di angolo  $\Delta\theta$ . Si definisce velocità angolare la variazione di angolo nell'intervallo di tempo:  $\omega = \Delta\theta/\Delta t$  e accelerazione angolare  $\alpha$  la variazione della velocità angolare nell'intervallo di tempo:  $\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ . I vettori  $\Delta\theta$ ,  $\omega$  e  $\alpha$  hanno la direzione e il verso dell'asse di rotazione, come indicato nel §E5.1.

Il momento di una forza  $\mathbf{M}$  (5.1) e (5.2) genera una variazione del moto rotatorio (*2° principio della Dinamica rotatoria*), infatti con le opportune modifiche le leggi della Dinamica rotatoria riproducono i principi e le leggi della Dinamica traslatoria. In particolare si definisce momento  $\mathbf{L}$  della quantità di moto totale (chiamato anche *momento angolare totale*) di un corpo materiale, rispetto ad un punto O arbitrario (per semplicità proiezione del punto A, baricentro del corpo, sull'asse di rotazione), il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{L} = \overline{\mathbf{OA}} \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}. \quad (5.14)$$

Il cui modulo risulta essere dato da (vedi Approfondimento consultabile in QR alla fine del paragrafo), ricordando il simbolo sommatoria  $\Sigma$  introdotto nel §1.4d:

$$L = \Sigma m_i r_i^2 \omega = I\omega \quad (5.15)$$



**Figura 5.11**

La massa  $m$  viene suddivisa in tanti piccoli volumi  $m_i$ . La somma di tutti i volumi  $m_i$  è la massa totale  $m = \sum_i m_i$ .

dove

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \quad (5.16)$$

e dove con  $m_i$  si intende le piccole masse in cui abbiamo suddiviso il corpo e  $r_i$  la loro distanza dall'asse di rotazione (vedi Figura 5.11).

Il **momento d'inerzia**  $I$  è l'analogo della massa (d'inerzia)  $m$  nei moti traslatori e dipende dalla forma geometrica del corpo: infatti il 2° principio della Dinamica rotatoria si esprime in  $\mathbf{M} = I\alpha$ . Il momento di inerzia  $I$  si misura nel S.I. in  $\text{kg m}^2$ .

Nella Tabella 5.1 sono riportate le analogie dei principi e delle leggi relativi tra traslazioni e rotazioni, di interesse sono il 2° principio della Dinamica e l'espressione dell'energia cinetica. Maggiori dettagli sono reperibili nel §E5.1 consultabile nel seguito tramite QR.

**Tabella 5.1** Analogia tra il moto di traslazione e il moto di rotazione

TRASLAZIONE	ROTAZIONE	
$\Delta s$	$\Delta \theta$	
$v$	$\omega \rightarrow v = \omega \wedge r$	velocità
$a$	$\alpha$	accelerazione
$\mathbf{q} = m v$	$\mathbf{L} = r \wedge m v = I \omega$	
$\mathbf{F}$	$\mathbf{M} = r \wedge \mathbf{F}$	
$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$	$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	
$m$	$I = \sum_i m_i r_i^2$	
$\mathbf{F} = m a$	$\mathbf{M} = I \alpha$	2° principio Dinamica
$\Delta \mathbf{q} = 0$	$\Delta \mathbf{L} = 0$	conservazione
$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$	energia cinetica

Come accennato nel paragrafo introduttivo, le nozioni del moto rotatorio di un corpo rigido sono riportate nel **§E5.1 DINAMICA DEL CORPO RIGIDO (TRASLATORIA E ROTATORIA)** dove viene definito il momento d'inerzia  $I$  (vedi alla fine del capitolo il Riepilogo delle grandezze fisiche trattate) che fa le veci della massa nei principi base della Dinamica rotatoria (vedi Tabella E5.1). L'argomento è formalmente non semplice e di limitata applicazione pratica in Medicina dato che coinvolge lavori o energie trascurabili rispetto a quelle derivate dai moti traslatori.



Come ulteriori applicazioni di moti rotatori viene trattato il **pendolo composto nel §E5.1** (in relazione al pendolo semplice svolto nel §4.4b) e il **moto roto-traslatorio su un piano inclinato (nell'Esempio E5.2)** in relazione al §4.4a (semplice traslazione sul piano inclinato): come quello a cui si fa riferimento.

## 5.6 ELASTICITÀ E LEGGE DI HOOKE

Abbiamo finora considerato corpi rigidi, cioè non deformabili. In natura tuttavia i corpi sono tutti **deformabili**, alcuni in modo quasi impercettibile, altri invece presentano deformazioni rilevanti anche per piccole forze applicate. Un corpo solido si definisce **elastico** se riprende la sua forma originale una volta rimosse le cause che lo hanno deformato. Al contrario, si dice **plastico** qualora la deformazione permanga nel tempo, anche eliminandone le cause. In natura tutti i

corpi possono essere considerati elastici purché la deformazione sia sufficientemente piccola. Per i corpi elastici si riscontra sperimentalmente una proporzionalità fra la forza applicata e la deformazione (allungamento o compressione) (4.16) Questa legge, conosciuta come *legge di Hooke*, è già stata utilizzata nel §4.2e, nello studio del moto armonico di un punto materiale sottoposto ad una forza di richiamo.

La legge di Hooke, quando la deformazione consiste nell'allungamento di un corpo (Figura 5.12), si scrive:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta \ell}{\ell}, \quad (5.17)$$

dove  $F$  è il modulo della forza applicata,  $A$  l'area della sezione del corpo,  $\Delta \ell$  l'allungamento ed  $\ell$  la sua lunghezza iniziale. La costante  $E$ , chiamata *modulo di elasticità di Young*, si misura nel S.I. in  $\text{N m}^{-2}$ ; essa dipende dal materiale che costituisce il corpo ed è tanto maggiore quanto meno il corpo è deformabile. Nella Tabella 5.2 sono riportati i moduli di Young per vari materiali.

**Tabella 5.2** Modulo di Young per diversi materiali

MATERIALE	$E$ ( $\text{N m}^{-2}$ )	MATERIALE	$E$ ( $\text{N m}^{-2}$ )
acciaio	$2 \cdot 10^{11}$	legno duro	$1 \cdot 10^{10}$
vetro	$7 \cdot 10^{10}$	tendine	$2 \cdot 10^7$
mattone	$2 \cdot 10^{10}$	cartilagine (coste)	$1.2 \cdot 10^7$
ossa (lungo l'asse) trazione	$1.8 \cdot 10^{10}$	gomma	$1 \cdot 10^6$
ossa (lungo l'asse) compressione	$0.9 \cdot 10^{10}$	vasi sanguigni	$2 \cdot 10^5$

Il rapporto  $F/A \equiv \sigma$  prende il nome di *sfuerzo (stress)* mentre l'allungamento relativo  $\Delta \ell / \ell \equiv \varepsilon$  quello di *stiramento (strain)*, per cui la (5.17) assume anche la forma:

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (5.18)$$

La legge di Hooke può essere scritta anche per deformazioni di volume o di membrane. Essa assume per i volumi la forma:

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}, \quad (5.19)$$

dove  $\Delta p$  è la variazione di pressione subita dal corpo di volume  $V$ ,  $K$  è chiamato *modulo di compressione* e dove il segno meno sta a indicare che a un aumento di pressione corrisponde una diminuzione di volume  $\Delta V$ .

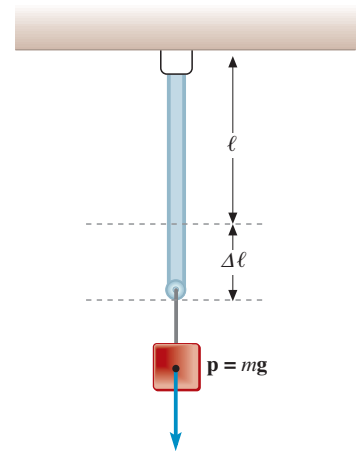
Nel caso delle membrane la legge di Hooke si scrive:

$$\frac{F}{\ell} = k \frac{\Delta S}{S}, \quad (5.20)$$

dove  $F/\ell$  è la forza applicata per unità di lunghezza del contorno  $\ell$  della membrana,  $S$  la superficie iniziale della membrana e  $k$  la costante elastica della membrana.

## 5.7 LE FORZE DI ATTRITO

Le *forze di attrito* tra i corpi hanno l'effetto di impedire il loro moto reciproco. In particolare tali forze si esplicano a livello atomico e molecolare con una miriade



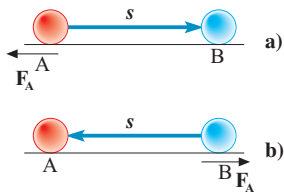
**Figura 5.12**

La forza applicata (sotto forma di forza peso  $\mathbf{p}$ ) allunga l'asta la cui lunghezza passa dal valore iniziale  $\ell$  al valore finale  $\ell + \Delta \ell$ . Se il materiale dell'asta si comporta in modo elastico, l'allungamento è proporzionale alla forza applicata.

Deformazione di lunghezza

Deformazione volumetrica

Deformazione di superficie

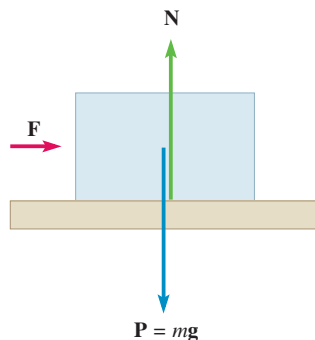


**Figura 5.13**

(a) Un corpo striscia da A a B percorrendo un tratto  $s$ . La forza d'attrito  $F_A$  compie un lavoro resistente dato da  $L_{AB} = -F_A s$ .

In (b) il corpo è strisciato da B ad A e la forza d'attrito (che si oppone sempre al moto) compie un lavoro  $L_{BA} = -F_A s$ . Il lavoro totale lungo la traiettoria chiusa da A a B e di ritorno ad A è  $L_{chiusa} = -2 F_A s$ , certamente diverso da zero (essendo comunque  $F_A \neq 0$  e  $s \neq 0$ ): la forza d'attrito **non è conservativa**.

#### Forze di attrito statico e di attrito cinetico



**Figura 5.14**

Quando aumenta la forza normale alle superfici di contatto, aumenta in modo proporzionale il contatto microscopico tra le superfici e quindi cresce la forza di attrito che è necessario superare per mettere in moto il blocco.

di interazioni tra i livelli energetici degli orbitali (Capitolo 28: Materia e radiazioni) e tra i materiali a contatto.

Dal punto di vista macroscopico, le forze di attrito hanno la caratteristica di **opporsi** al moto del corpo e in generale possono essere espresse dalla relazione:

$$F_A = -f v, \quad (5.21)$$

dove il segno meno rappresenta il fatto che queste forze si oppongono al moto del corpo e dove  $f$  è un coefficiente, di solito assai complesso, che dipende dalla geometria del corpo, dalle caratteristiche fisiche sue e del mezzo in cui si muove. Dalla Figura 5.13 risulta evidente che le forze di attrito **non sono conservative** (sono **dissipative**).

In generale si distinguono due tipi di forze d'attrito. Per mettere in moto un corpo, appoggiato su un piano, è necessario applicare al corpo una forza  $F$  superiore alla **forza di attrito statico**  $F_{as}$ , la quale è proporzionale al modulo della reazione vincolare  $N$  subita dal corpo a causa del proprio peso  $P$  (Figura 5.14):

$$F \geq F_{as} = \mu_s N, \quad (5.22)$$

e  $\mu_s$  è chiamato coefficiente di attrito statico e dipende dalla natura delle superfici di contatto tra corpo e piano d'appoggio. Quando il corpo è in moto e striscia sul piano, la forza di attrito che si oppone al moto diminuisce, pur restando proporzionale a  $N$  (**forza di attrito dinamico o cinetico**):

$$F_{ac} = \mu_c N, \quad (5.23)$$

dove  $\mu_c$  è il coefficiente di attrito cinetico con  $\mu_c < \mu_s$ : ci vuole infatti più forza per far partire una slitta che per mantenerla in moto.

Per provocare il moto è necessario che il modulo della forza agente  $F$  sia superiore alla forza di attrito statico. Per mantenere lo stato di moto è necessario che la forza agente  $F$  sia superiore o uguale alla forza di attrito dinamico.

È interessante considerare in che modo è possibile misurare il coefficiente di attrito statico  $\mu_s$ . Riprendiamo il moto di un solido sul piano inclinato riportato nel §4.4 nel caso in cui gli attriti non siano trascurabili, l'accelerazione viene calcolata tenendo conto della componente perpendicolare al piano inclinato, responsabile dell'attrito statico:  $a_{\perp} = \mu_s g \cos\theta$  e quindi l'accelerazione complessiva (vedi la (4.42) in assenza di attrito) risulta:

$$a = g (\sin\theta - \mu_s \cos\theta). \quad (5.24)$$

In condizione di equilibrio  $a = 0$  e quindi

$$\sin\theta - \mu_s \cos\theta = 0 \quad \text{da cui} \quad \mu_s = \tan\theta.$$

Sfruttando il piano inclinato si può determinare il coefficiente d'attrito statico tra il particolare corpo e il piano semplicemente misurando l'angolo  $\theta$  oltre il quale il corpo inizia a scendere lungo di esso.

**ESEMPIO 5.2** Forze di attrito su un'autovettura in curva

A quale velocità massima un'autovettura, di massa  $m = 1500$  kg, può affrontare in una strada piana una curva avente raggio  $r = 40$  metri. Si assuma il coefficiente di attrito statico  $\mu_s = 0.5$ .

**Soluzione** L'autovettura si muove in curva di moto circolare uniforme con velocità periferica  $v$  e quindi è soggetta ad una forza centrifuga controbilanciata dalla forza centripeta dovuta all'attrito tra pneumatici e asfalto. La traiettoria è un arco di circonferenza di raggio  $r$  senza spostamento lungo  $r$  e il coefficiente di attrito rilevante per questo caso è quello statico  $\mu_s$  dato dalla (5.22), dove  $N$  è la forza peso dell'autovettura:

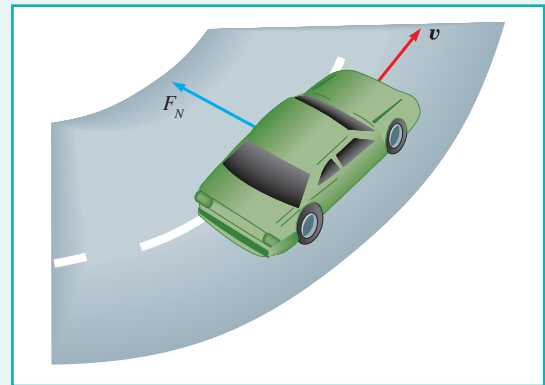
$$N = m g.$$

L'accelerazione centrifuga è data dalla (3.13)  $a = v^2/r$ , per cui il massimo di velocità si avrà all'equilibrio:

$$\mu_s m g = m v^2/r,$$

da cui abbiamo:

$$v = \mu_s g r = 0.5 \cdot 9.8 \text{ m s}^{-2} \cdot 40 \text{ m} = 14 \text{ m s}^{-1} = 50.4 \text{ km/h}.$$



**Figura 5.15**  
Autovettura in curva.

Nel caso di un treno su rotaie in curva, la forza centripeta è fornita dal sistema che tiene fisse le rotaie.

**RIEPILOGO DELLE GRANDEZZE FISICHE E UNITÀ DI MISURA**

	Sistema Internazionale	Sistema C.G.S.	Sistema pratico
momento di una forza $M$	newton metro (N m)	dyna centimetro (dyn cm)	—
momento angolare $\ell, L$	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-1}$	$\text{cm}^2 \text{g s}^{-1}$	—
guadagno meccanico $G$	<i>grandezza priva di dimensioni</i>		
momento d'inerzia $I$	$\text{kg m}^2$	$\text{g cm}^2$	—
angolo $\theta$	radianti	radianti	gradi sessagesimali
velocità angolare $\omega$	radianti $\text{s}^{-1}$	radianti $\text{s}^{-1}$	gradi $\text{s}^{-1}$
accelerazione angolare $\alpha$	radianti $\text{s}^{-2}$	radianti $\text{s}^{-2}$	gradi $\text{s}^{-2}$
modulo di elasticità di Young $E$	$\text{N m}^{-2}$	dyna $\text{cm}^{-2}$	—
modulo di compressione $K$	$\text{N m}^{-2}$	dyna $\text{cm}^{-2}$	—
costante elastica di membrana $k$	$\text{N m}^{-2}$	dyna $\text{cm}^{-2}$	—
sforzamento (stress) $\sigma$	$\text{N m}^{-2}$	dyna $\text{cm}^{-1}$	—
stiramento (strain) $\epsilon$	<i>grandezza priva di dimensioni</i>		
coefficiente di attrito statico $\mu_s$	<i>grandezza priva di dimensioni</i>		
coefficiente di attrito cinetico $\mu_c$	<i>grandezza priva di dimensioni</i>		

**PROBLEMI**

- 5.1 Un disco metallico A ruota liberamente intorno all'asse verticale passante per il suo centro, compiendo 2400 giri al minuto. Un secondo disco B, il cui momento d'inerzia è nove volte quello del disco A, è disposto sullo stesso asse fermo ad una certa distanza sopra il disco A. Il disco B viene lasciato cadere su A, dopo di che i due dischi ruotano insieme con la stessa velocità angolare. Qual è il valore della velocità angolare comune ai due dischi?
- 5.2 Il centro di una noce inserita in uno schiaccianoci dista dal fulcro 40 mm; se l'attrezzo è impugnato in modo che il centro del palmo della mano sia a 14 cm dal fulcro, qual è il guadagno meccanico che ne risulta?
- 5.3 In una bilancia a bracci disuguali un corpo di peso  $p_1 = 10.48$  grammi viene equilibrato da un peso  $p_2 = 9.95$  grammi. Calcolare il rapporto fra le lunghezze dei due bracci.
- 5.4 Un soggetto di 80 kg di massa si trova sul bordo di una piattaforma circolare e omogenea di massa pari a 150 kg con un diametro di 8 m, libera di ruotare intorno al proprio centro. L'uomo, da fermo ma solidale con la piattaforma, lancia tangenzialmente un corpo di massa di 1.5 kg alla velocità di  $25 \text{ m s}^{-1}$  relativa al suolo. Calcolare la conseguente velocità angolare dell'uomo e della piattaforma.
- 5.5 Un operaio pone una leva lunga 2.5 m sotto un masso pesante 300 kg. Il fulcro della leva si trova a 0.2 m dal punto in cui la leva tocca il masso. Calcolare la forza necessaria a sollevare la roccia.
- 5.6 Individuare il centro di massa del pezzo meccanico costituito da un disco del diametro di 5 cm e alto 2 cm unito ad una sbarra cilindrica di raggio 1 cm e lunga 15 cm costituita da un materiale omogeneo con l'asse passante per il centro del disco.
- 5.7 Un'auto con il suo guidatore ha una massa di 1400 kg. Da una velocità di 25 m/s l'auto frena fino ad arrestarsi in 180 metri. Valutare la forza totale di attrito tra strada e pneumatici (nell'ipotesi che tale forza sia costante). La frenata avviene senza slittamento delle ruote.
- 5.8 Un righello di un metro, appeso ad un estremo, oscilla come un pendolo reale. Determinare il suo periodo di oscillazione. Quale dovrebbe essere la lunghezza di un pendolo semplice con lo stesso periodo?

# I fondamenti della Meccanica

## Parte III: Elementi di Statica e di Dinamica rotatoria. Corpi deformabili e attrito



### 5.1 INTRODUZIONE

In questo capitolo vengono svolte le principali nozioni di *Statica* (dei corpi rigidi e dei corpi deformabili), indispensabili per stabilire lo stato di equilibrio delle articolazioni e le modalità di frattura delle strutture ossee, e i principali aspetti della *Dinamica rotatoria*, che, in aggiunta alla *Dinamica traslatoria* (trattata nei capitoli precedenti), permette di comprendere nel seguente Capitolo 6 alcuni fenomeni biologici come le fratture, la deambulazione e la percezione delle rotazioni.

È opportuno rilevare che la Dinamica rotatoria diventa importante solo in determinati casi, poiché le *energie di rotazione sono trascurabili rispetto a quelle di traslazione*: infatti è molto più facile porre in rotazione un corpo che farlo in moto di traslazione, come risulta evidente dai moti dimostrativi dei corpi in assenza di peso sulla Stazione Spaziale Internazionale.

Per questo motivo, e per la sua intrinseca complessità formale, il paragrafo relativo ai moti di rotazione con alcuni Esempi costituisce un approfondimento in questo testo consultabile scansionando il corrispondente QR alla fine del §5.5.

Infine, come già scritto nell'introduzione del Capitolo 3, questo capitolo termina svolgendo alcune nozioni relative ai corpi deformabili e alle forze di attrito, nozioni indispensabili alla comprensione delle applicazioni della Meccanica ai sistemi biologici (Capitolo 6).

### 5.2 EQUILIBRIO DI UN CORPO RIGIDO

Prima di considerare le condizioni di equilibrio dei corpi, introduciamo la definizione di *momento di una forza rispetto ad un punto O*. Consideriamo un corpo rigido, cioè che non si possa deformare, quale che sia l'entità delle forze che agiscono su di esso, sul quale agisce una forza  $\mathbf{F}$  applicata nel punto A e un punto O *qualsiasi*, come mostrato in Figura 5.1. Si definisce *momento M di una forza* (chiamato anche *momento torcente*) *rispetto al punto O* il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{M} = \overline{\mathbf{OA}} \wedge \mathbf{F} \quad (5.1)$$

dove  $\overline{\mathbf{OA}}$  è il vettore distanza diretto da O ad A. Il modulo del vettore  $\mathbf{M}$  è fornito da:

$$M = F \overline{\mathbf{OA}} \sin \phi = F b \quad (5.2)$$

dove abbiamo indicato con  $\phi$  l'angolo fra i vettori e con  $b$  la distanza della retta d'azione della forza  $\mathbf{F}$  dal punto O (Figura 5.1);  $b$  prende il nome di braccio della forza rispetto al punto O. Dalla definizione di prodotto vettoriale (§2.5c), osservando la Figura 2.10 e immaginando che il punto O sia fisso e che A sia rigidamente collegato ad O, si vede che solo nel caso in cui il momento della forza è diverso da zero (cioè  $b \neq 0$  e  $\sin \phi \neq 0$ ), la forza tende a produrre una rotazione di A intorno

Momento di una forza, momento torcente

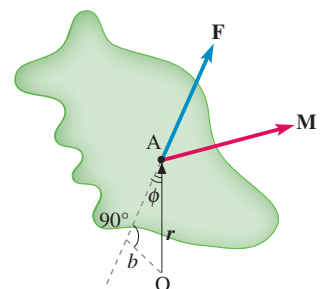


Figura 5.1

Momento  $\mathbf{M}$  della forza  $\mathbf{F}$  rispetto al punto arbitrario O.

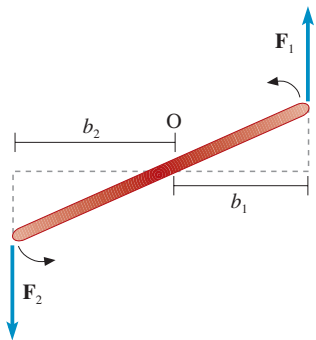


Figura 5.2

Pur essendo soddisfatta la condizione di equilibrio traslazionale  $F_1 = -F_2$ , l'asta possiede un momento diverso da zero:

$$M = F_1 b_1 + F_2 b_2,$$

che ne causa la rotazione.

Equilibrio traslazionale

Equilibrio rotazionale

no ad O. Dalla definizione, il momento di una forza si misura nel Sistema Internazionale in *newton metro* (N m). Il momento di una forza, quindi, possiede le stesse dimensioni del lavoro meccanico. Per distinguere le due grandezze il lavoro meccanico viene misurato sempre in joule (J), il momento di una forza in newton metro (N m).

Limitiamoci ora a considerare le condizioni di equilibrio di *un punto materiale* sottoposto a più forze e di *un corpo non puntiforme*, ma supposto *rigido*, sotto l'azione di forze ad esso applicate.

La *condizione di equilibrio per un punto materiale* è che la somma vettoriale di tutte le forze ad esso applicate dia luogo ad una risultante **R** nulla, cioè ad una forza di modulo zero:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots = \sum_i F_i = R = 0. \tag{5.3}$$

Nel caso invece che si tratti di un *corpo rigido di dimensioni finite*, la condizione (5.3) non è più sufficiente per assicurare l'equilibrio del corpo, perché questo potrebbe compiere dei moti rotatori, come nel caso di due forze uguali ed opposte, ma aventi rette d'azione parallele (Figura 5.2). Alla condizione (5.3), detta di *equilibrio traslazionale*, bisogna aggiungere la condizione che la risultante **M<sub>T</sub>** dei momenti di tutte le forze applicate al corpo, calcolati rispetto ad un unico punto *O arbitrario* (Figura 5.3), sia pure essa nulla (condizione di *equilibrio rotazionale*):

$$M_1 + M_2 + M_3 + \dots = \sum_i M_i = M_T = 0. \tag{5.4}$$

Le due condizioni di equilibrio per i corpi rigidi (5.3) e (5.4) sono relazioni vettoriali, le quali, tramite le componenti lungo *x*, *y* e *z* dei vettori, corrispondono a  $3 + 3 = 6$  relazioni scalari, che devono essere contemporaneamente soddisfatte per poter garantire l'equilibrio, come si vedrà in un caso particolare nel §5.5.

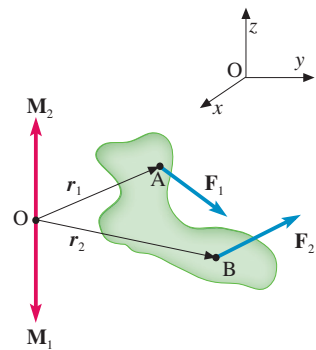


Figura 5.3

L'equilibrio del corpo è soddisfatto se:  $F_1 + F_2 = 0$  e  $M_1 + M_2 = \vec{OA} \wedge F_1 + \vec{OB} \wedge F_2 = r_1 \wedge F_1 + r_2 \wedge F_2 = 0$ .

### 5.3 I VINCOLI E LE LEVE

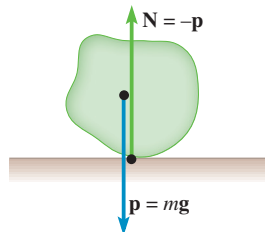
Può accadere che la mobilità di un corpo sia limitata dalla presenza di qualche *vincolo*. I vincoli fissi ideali sono elementi che non si spostano, né si deformano sotto l'azione di forze. Ne è un esempio pratico il *piano orizzontale* su cui è poggiato un corpo: la forza peso che agisce sul corpo è bilanciata dalla *forza di reazione del vincolo*, uguale ed opposta, per cui il corpo resta in equilibrio (Figura 5.4). Altri esempi sono gli assi di rotazione di pendoli, ruote, eliche e così via.

Nel caso particolare in cui il corpo rigido sia vincolato in *un punto*, le condizioni di equilibrio sono semplificate. Infatti la risultante **R** delle forze del corpo potrà essere sempre in teoria equilibrata dalla reazione del vincolo. Questo significa semplicemente che, se il corpo è vincolato in un punto, la condizione di equilibrio rispetto ad un moto traslatorio è automaticamente soddisfatta. Quindi condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un corpo vincolato in un punto è la sola condizione (5.4) di equilibrio rotazionale.

Se il corpo è invece libero di ruotare intorno ad un asse fisso, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che sia nulla la somma vettoriale delle proiezioni sull'asse di rotazione dei momenti delle forze applicate al corpo.

Figura 5.4

La forza peso **P** non fa sprofondare nel piano il corpo a causa della reazione vincolare **N** del piano. Il corpo resta in equilibrio sul piano poiché  $P + N = 0$  e il momento di ciascuna forza è nullo (prendendo come punto O arbitrario uno dei punti di applicazione di **N** e di **P**).



Un'asta rigida, chiamata *leva*, girevole intorno ad un asse perpendicolare all'asta stessa, detto *fulcro*, è il sistema meccanico (o macchina) più semplice mediante il quale è possibile fare equilibrio con una forza  $F_m$ , detta motrice, applicata a uno dei suoi punti (M), ad un'altra forza  $F_r$ , detta resistente, applicata a un altro suo punto (R), come mostrato nella Figura 5.5. Nella semplice ipotesi che le due forze agiscano in un piano perpendicolare al fulcro (Figura 5.5), l'equilibrio si ottiene quando i momenti delle due forze sono uguali ed opposti, cioè quando:

$$b_m F_m - b_r F_r = 0,$$

da cui:

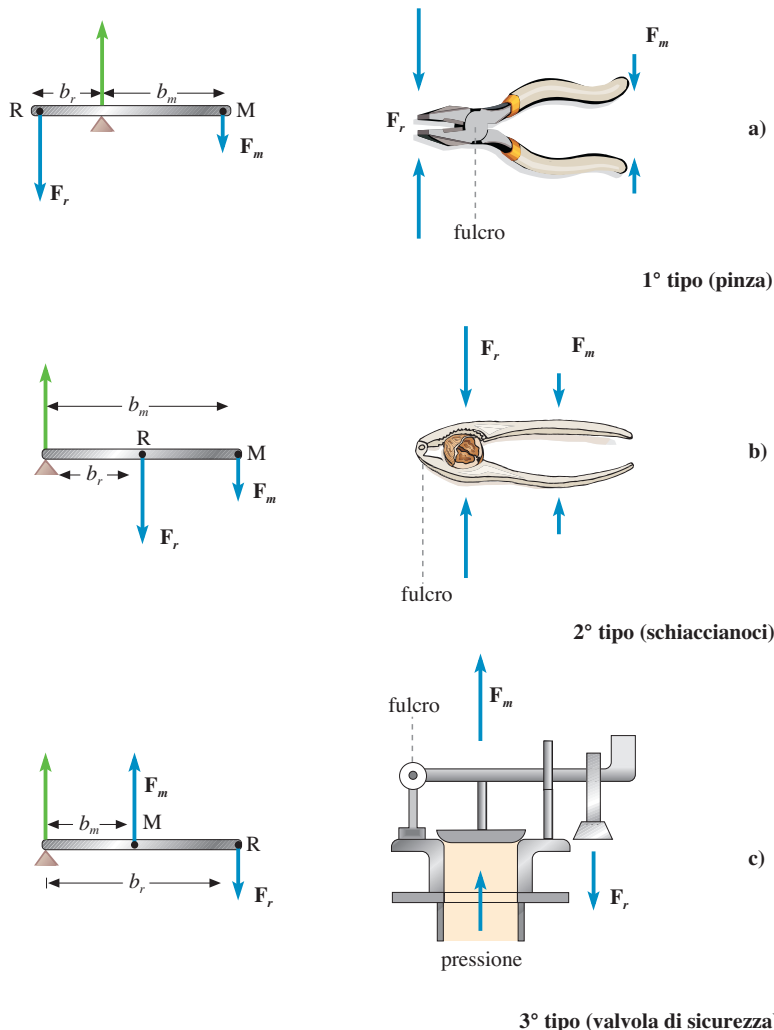
$$b_m F_m = b_r F_r, \quad (5.5)$$

dove  $b_r$  e  $b_m$  sono rispettivamente i bracci della forza motrice e della forza resistente, eseguendo il calcolo dei momenti rispetto al fulcro (il fulcro è il punto arbitrario O).

Il rapporto adimensionale:

$$G = \frac{F_r}{F_m} = \frac{b_m}{b_r}, \quad (5.6)$$

esprime il *guadagno meccanico* che si può realizzare con la leva.



**Figura 5.5**

(a) Leva del 1° tipo: pinza. (b) Leva del 2° tipo: schiaccianoci. (c) Leva del 3° tipo: valvola di sicurezza. Per completezza, in questa e nelle successive figure relative alle leve, viene rappresentata la forza di reazione vincolare applicata al fulcro che deve soddisfare l'equilibrio traslazionale del sistema.

3 tipi di leva

3° tipo (valvola di sicurezza)

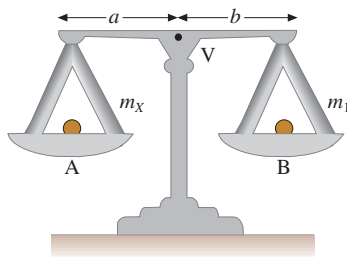
Come mostrato nella Figura 5.5, esistono tre tipi di leve a seconda della posizione del fulcro rispetto ai punti di applicazione delle forze.

Con le leve del 1° tipo (Figura 5.5a, fulcro intermedio fra R ed M) si può avere un guadagno sia maggiore sia minore di uno. La pinza è un esempio di leva del primo tipo.

Le leve del 2° tipo (Figura 5.5b, R intermedio fra fulcro ed M) hanno un guadagno sempre maggiore di uno (perciò si dicono vantaggiose). Lo schiaccianoci o la carriola sono tipici esempi di leva del 2° tipo.

Nel caso delle leve del 3° tipo (Figura 5.5c, M intermedio fra fulcro ed R), il guadagno  $G$  è sempre minore di uno (leve svantaggiose). Ne è un esempio la valvola di sicurezza di tipo meccanico mostrata in Figura 5.5c. Vedremo nel §6.3 e nel §E6.2 (consultabili scansionando i corrispondenti QR) alcune applicazioni delle leve al corpo umano.

### Bilancia



**Figura 5.6**

La bilancia: V è il fulcro dei due bracci di lunghezza  $a$  e  $b$  che sostengono i piattelli A e B su cui porre la massa incognita e la massa equilibratrice (costituita da masse tarate con precisione).

A conclusione di questo paragrafo consideriamo due leve del 1° tipo di uso comune: **la bilancia** (Figura 5.6) e **la carrucola** (Figura 5.7). Per la bilancia, trattandosi di un sistema vincolato, girevole intorno ad un asse passante per il fulcro V, per quanto detto sopra, la condizione (5.3) è automaticamente soddisfatta, mentre la condizione (5.4) si riduce ad un'equazione scalare. Indicata con  $m_x$  la massa incognita situata sul piattello A e con  $m_1$  la massa equilibratrice collocata sul piattello B si ottiene:

$$m_x g a = m_1 g b \quad \text{da cui} \quad m_x = m_1 \frac{b}{a}, \quad (5.7)$$

dove  $a$  e  $b$  sono i bracci, rispetto al fulcro V, della forza peso incognita  $m_x g$  e della forza peso equilibratrice  $m_1 g$ .

Se le lunghezze dei bracci della bilancia fossero uguali, la (5.7) fornirebbe il valore della massa incognita uguale al valore di quella equilibratrice. In realtà, per quanto accurata possa essere l'esecuzione del costruttore, le lunghezze  $a$  e  $b$  dei bracci non possono essere mai esattamente uguali, per cui, per determinare con elevata precisione il valore della massa incognita  $m_x$ , è necessario procedere nel modo seguente (**metodo della doppia pesata**).

Si effettua una seconda pesata, ponendo la massa incognita  $m_x$  sul piattello B e la nuova massa equilibratrice  $m_2$  sul piattello A:

$$m_x g b = m_2 g a \quad (5.8)$$

e moltiplicando membro a membro la (5.8) per la (5.7) si ottiene:

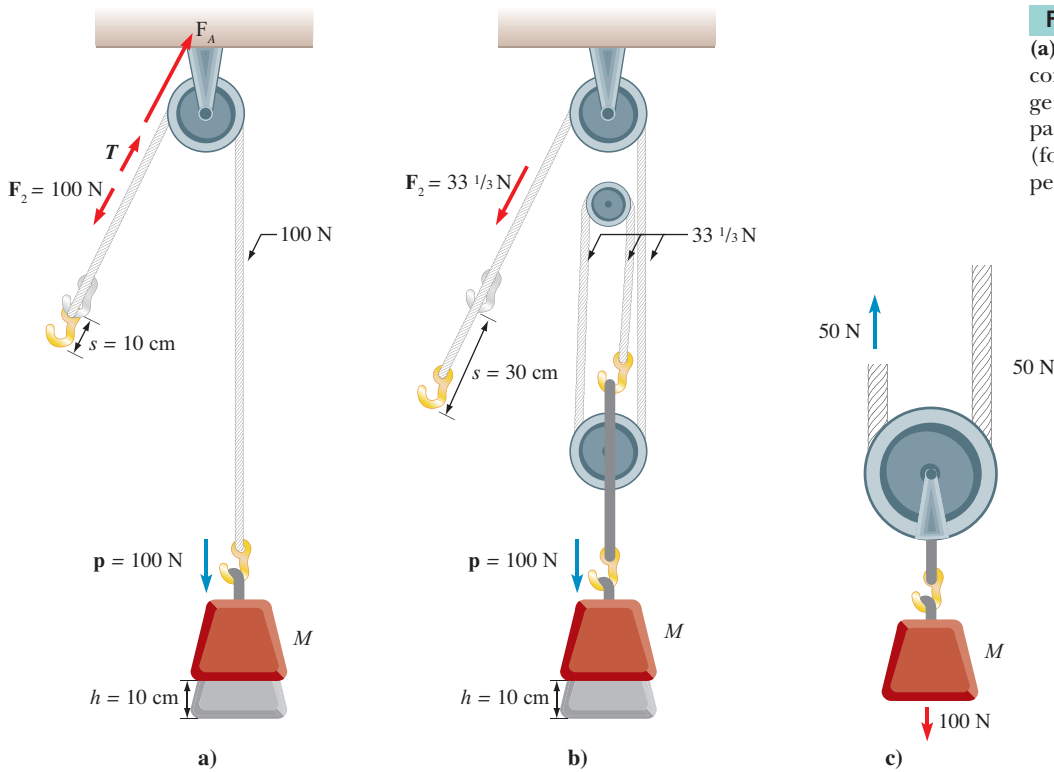
$$m_x = \sqrt{m_1 m_2}, \quad (5.9)$$

che è la media geometrica fra le due masse equilibratrici. Questa può essere sostituita dalla media aritmetica  $m_x = (m_1 + m_2)/2$ , dato che le due masse  $m_1$  e  $m_2$  differiscono molto poco tra loro.

Un'altra leva del 1° tipo di uso comune è la carrucola fissa (Figura 5.7a), dove l'asse di rotazione della carrucola è il fulcro e il suo raggio costituisce i bracci. In vista delle applicazioni biologiche riportate nel §6.3 è opportuno ricordare che una **carrucola** in generale è una macchina semplice adatta al sollevamento di carichi, mentre la **puleggia** è un organo di trasmissione costituito da un disco che ruota intorno al proprio asse.

Come si vede dalla figura, in assenza di forza di tensione della corda  $T$  e di forza di attrito carrucola-corda  $F_A$ , la forza peso resistente  $\mathbf{p}$  e la forza motrice  $\mathbf{F}$  sono uguali e il guadagno (5.6) è uguale a uno. La tensione e la forza di attrito, entrambe opposte alla forza motrice  $\mathbf{F}$ , in realtà non sono nulle e il guadagno risulta quindi maggiore di uno.

### Carrucola e puleggia



**Figura 5.7**

(a) Carrucola fissa. (b) Carrucola composta (paranco) con 3 pulegge: comporta una forza motrice pari a  $1/3$  della forza resistente (forza peso). (c) Carrucola mobile per la quale il guadagno è  $G \geq 2$ .

La carrucola composta (Figura 5.7b) permette di amplificare in modo notevole la forza muscolare, per sollevare ad esempio elementi architettonici come colonne, obelischi e blocchi di marmo e per tirare navi in secca. La stessa cosa avviene con la carrucola mobile mostrata in Figura 5.7c, dove la corda è fissata in un punto e la puleggia si muove.

### 5.4 CENTRO DI MASSA E BARICENTRO

Consideriamo un sistema di più particelle, avente massa complessiva pari a:

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots = \sum_i m_i, \tag{5.10}$$

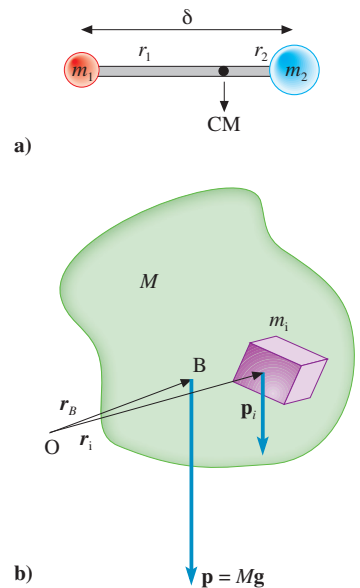
dove  $m_i$  è la massa della  $i$ -esima particella. Sia  $r_i$  il vettore posizione della  $i$ -esima particella riferito a un'origine arbitraria. La posizione del **centro di massa** (CM) del sistema, rispetto alla stessa origine, è rappresentata dal vettore  $r_{CM}$  definito da:

$$M r_{CM} = m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \dots = \sum_i m_i r_i. \tag{5.11}$$

Nel caso di 2 particelle la (5.11) diventa:

$$r_{CM} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M} r_1 + \frac{m_2}{M} r_2, \tag{5.12}$$

mentre nel caso di un corpo di dimensioni finite, questo può essere suddiviso in tanti volumetti  $i$ -esimi adiacenti (Figura 5.8b), diventando così un sistema a molte particelle cui applicare la (5.11) a coppie successive.



**Figura 5.8**

(a) Sistema a due corpi. (b) Sistema a molte particelle: un corpo di dimensioni finite di massa  $M$  può essere suddiviso in tante parti (cubetti elementari di massa  $m_i$ ) su cui agisce la forza peso  $p_i$ . La coordinata del baricentro si calcola utilizzando la relazione (5.13). La forza peso complessiva del corpo  $p = Mg$  viene applicata al baricentro B.

Più correttamente per un corpo di dimensioni finite si impiega il calcolo integrale con cui le relazioni (5.10) e (5.11) diventano rispettivamente:

$$M = \int_M dm = \int_V d(r) dV, \quad (5.10a)$$

dove  $d = d(r)$  è la densità del corpo:

$$M \mathbf{r}_{CM} = \int_V d(r) \mathbf{r} dV. \quad (5.11a)$$

Nel caso di un sistema a due corpi di massa  $m_1$  e  $m_2$  distanti tra loro  $\delta$  (vedi Figura 5.10) il centro di massa è dato dalla (5.12); scegliendo l'origine del sistema di riferimento nel centro di massa,  $r_{CM} = 0$ , per cui la (5.12) diventa:

$$m_1 (-r_1) + m_2 r_2 = 0,$$

che diventa:

$$r_1/r_2 = m_2/m_1, \quad (5.12a)$$

da cui, essendo  $r_1 + r_2 = \delta$ , si ricavano facilmente le distanze  $r_1$  e  $r_2$ .

La forza peso che agisce su un corpo di massa  $M$ , sottoposto all'azione della gravità, è la risultante di tante forze di gravità elementari quante sono le particelle materiali di cui è costituito il corpo. Si definisce **centro di gravità**, o **baricentro**, di un corpo il punto di applicazione della forza peso che agisce su di esso. Formalmente esso è definito dalla coordinata  $\mathbf{r}_B$  data dalla seguente relazione, analoga alla (5.11):

$$Mg \mathbf{r}_B = m_1 g \mathbf{r}_1 + m_2 g \mathbf{r}_2 + m_3 g \mathbf{r}_3 + \dots = \sum_i m_i g \mathbf{r}_i, \quad (5.13)$$

dove  $Mg$  è il modulo della forza peso complessiva e  $m_i g$  sono i moduli delle forze peso agenti sulle singole particelle di cui è composto il corpo.

Come detto sopra, più correttamente per un corpo di dimensioni finite si impiega il calcolo integrale con cui la relazione (5.13) diventa (Figura 5.8b):

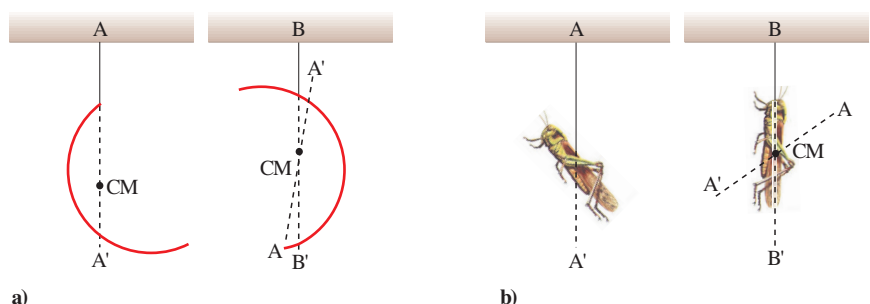
$$M g \mathbf{r}_B = \int_V d(r) g \mathbf{r} dV. \quad (5.13a)$$

Il centro di massa, definito dall'equazione (5.11), coincide con il baricentro (5.13) solo se l'accelerazione di gravità  $\mathbf{g}$  è la stessa per ciascuna particella del sistema e questo è praticamente sempre vero per i sistemi biologici.

Il baricentro di un corpo può essere facilmente individuato sperimentalmente usando metodi di bilanciamento. Ad esempio il baricentro di un'asta è individuato dal punto in cui essa è in equilibrio su un perno. Similmente, se si sospende un oggetto ad un perno attorno a cui è libero di ruotare, quando l'oggetto è in equilibrio stabile, il baricentro si troverà sulla verticale che passa per il perno, sotto di esso: sospendendo il corpo in un altro punto si può individuare il baricentro, come mostrato nei casi di Figura 5.9. L'Esempio E1.2 riporta il calcolo del centro di massa di un semianello.

**Figura 5.9**

(a) Il baricentro di un semicerchio si può individuare sperimentalmente, sospendendolo da due punti diversi e (b) in modo simile si individua il baricentro della locusta. Per la terza coordinata si deve sospendere la locusta lateralmente. CM = centro di massa.



**ESEMPIO 5.1** Centro di massa di due corpi

Calcolare la posizione del centro di massa dei due corpi puntiformi mostrati in Figura 5.10. La distanza tra i due corpi è  $d = 20$  cm e le masse sono  $m_1 = 4$  kg e  $m_2 = 8$  kg. Assumere che le due masse siano puntiformi.

**Soluzione** Ponendo l'origine del sistema di riferimento cartesiano  $x, y, z$  nel centro di massa (CM) e indicando con  $r_1$  e  $r_2$  rispettivamente le coordinate (in  $y$ ) delle due masse, abbiamo una massa totale  $M = 4$  kg +  $8$  kg =  $12$  kg. Dalla definizione di centro di massa (5.11) applicata al caso proposto di due soli corpi abbiamo:

$$M r_{\text{CM}} = m_1 r_1 + m_2 r_2.$$

Questa relazione vettoriale può essere scritta in forma scalare osservando che il centro di massa si trova in un punto della congiungente le due masse, che individua l'asse  $y$ . Gli altri due assi  $x$  e  $z$  forniscono valori nulli per le coordinate  $x_{\text{CM}}$  e  $z_{\text{CM}}$ . Abbiamo dunque:

$$M r_{\text{CM}} = m_1 (-r_1) + m_2 r_2.$$

Le coordinate  $x, y, z$  del centro di massa hanno valore zero, essendo il centro di massa l'origine del sistema di coordinate. Abbiamo allora:

$$m_1 (-r_1) + m_2 r_2 = 0.$$

Inoltre, abbiamo  $|r_1| + |r_2| = d = 20$  cm. Ottenendo  $|r_2| = 20$  cm -  $|r_1|$  e introducendola nella relazione precedente si ottiene:

$$-m_1 r_1 + m_2 (20 \text{ cm} - r_1) = (m_2 - m_1) r_1 + 20 m_2 = 0$$

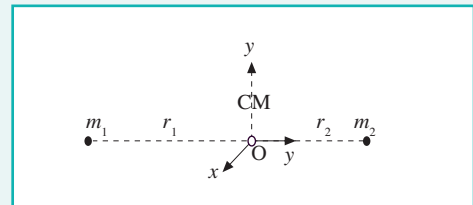
da cui:

$$r_1 = -13.33 \text{ cm} \quad \text{e}$$

$$r_2 = d - |r_1| = 20 \text{ cm} - 13.33 = 6.67 \text{ cm}.$$

Come era prevedibile, il centro di massa è spostato verso la massa maggiore  $m_2$ . Il centro di massa in caso siano presenti un terzo corpo di massa  $m_3$  o ulteriori corpi si ottiene eseguendo lo stesso procedimento tra il centro di massa dei primi due corpi (sempre puntiformi) e il terzo corpo e così via per eventuali altre masse.

Nel caso di corpi estesi è necessario impiegare il calcolo integrale per ottenere la massa totale e la posizione del centro di massa per ogni singolo corpo esteso.



**Figura 5.10**

Il sistema di riferimento  $x, y, z$  viene posto nel centro di massa (CM) delle due masse puntiformi.

## 5.5 CENNI DI DINAMICA ROTATORIA

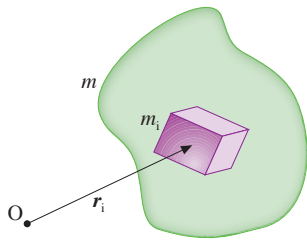
Oltre a traslare un corpo rigido può ruotare. In generale le rotazioni avvengono intorno ad un asse e sono caratterizzate da una variazione di angolo  $\Delta\theta$ . Si definisce velocità angolare la variazione di angolo nell'intervallo di tempo:  $\omega = \Delta\theta/\Delta t$  e accelerazione angolare  $\alpha$  la variazione della velocità angolare nell'intervallo di tempo:  $\alpha = \Delta\omega/\Delta t$ . I vettori  $\Delta\theta$ ,  $\omega$  e  $\alpha$  hanno la direzione e il verso dell'asse di rotazione, come indicato nel §E5.1.

Il momento di una forza  $\mathbf{M}$  (5.1) e (5.2) genera una variazione del moto rotatorio (*2° principio della Dinamica rotatoria*), infatti con le opportune modifiche le leggi della Dinamica rotatoria riproducono i principi e le leggi della Dinamica traslatoria. In particolare si definisce momento  $\mathbf{L}$  della quantità di moto totale (chiamato anche *momento angolare totale*) di un corpo materiale, rispetto ad un punto  $O$  arbitrario (per semplicità proiezione del punto  $A$ , baricentro del corpo, sull'asse di rotazione), il prodotto vettoriale:

$$\mathbf{L} = \overline{\mathbf{OA}} \wedge m\mathbf{v} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{q}. \quad (5.14)$$

Il cui modulo risulta essere dato da (vedi Approfondimento consultabile in QR alla fine del paragrafo), ricordando il simbolo sommatoria  $\Sigma$  introdotto nel §1.4d:

$$L = \Sigma m_i r_i^2 \omega = I\omega \quad (5.15)$$



**Figura 5.11**

La massa  $m$  viene suddivisa in tanti piccoli volumi  $m_i$ . La somma di tutti i volumi  $m_i$  è la massa totale  $m = \sum_i m_i$ .

dove

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \quad (5.16)$$

e dove con  $m_i$  si intende le piccole masse in cui abbiamo suddiviso il corpo e  $r_i$  la loro distanza dall'asse di rotazione (vedi Figura 5.11).

Il **momento d'inerzia**  $I$  è l'analogo della massa (d'inerzia)  $m$  nei moti traslatori e dipende dalla forma geometrica del corpo: infatti il 2° principio della Dinamica rotatoria si esprime in  $\mathbf{M} = I\alpha$ . Il momento di inerzia  $I$  si misura nel S.I. in  $\text{kg m}^2$ .

Nella Tabella 5.1 sono riportate le analogie dei principi e delle leggi relativi tra traslazioni e rotazioni, di interesse sono il 2° principio della Dinamica e l'espressione dell'energia cinetica. Maggiori dettagli sono reperibili nel §E5.1 consultabile nel seguito tramite QR.

**Tabella 5.1** Analogia tra il moto di traslazione e il moto di rotazione

TRASLAZIONE	ROTAZIONE	
$\Delta s$	$\Delta \theta$	
$v$	$\omega \rightarrow v = \omega \wedge r$	velocità
$a$	$\alpha$	accelerazione
$\mathbf{q} = m v$	$\mathbf{L} = r \wedge m v = I \omega$	
$\mathbf{F}$	$\mathbf{M} = r \wedge \mathbf{F}$	
$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$	$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$	
$m$	$I = \sum_i m_i r_i^2$	
$\mathbf{F} = m a$	$\mathbf{M} = I \alpha$	2° principio Dinamica
$\Delta \mathbf{q} = 0$	$\Delta \mathbf{L} = 0$	conservazione
$E_k = \frac{1}{2} m v^2$	$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2$	energia cinetica

Come accennato nel paragrafo introduttivo, le nozioni del moto rotatorio di un corpo rigido sono riportate nel **§E5.1 DINAMICA DEL CORPO RIGIDO (TRASLATORIA E ROTATORIA)** dove viene definito il momento d'inerzia  $I$  (vedi alla fine del capitolo il Riepilogo delle grandezze fisiche trattate) che fa le veci della massa nei principi base della Dinamica rotatoria (vedi Tabella E5.1). L'argomento è formalmente non semplice e di limitata applicazione pratica in Medicina dato che coinvolge lavori o energie trascurabili rispetto a quelle derivate dai moti traslatori.



Come ulteriori applicazioni di moti rotatori viene trattato il **pendolo composto nel §E5.1** (in relazione al pendolo semplice svolto nel §4.4b) e il **moto roto-traslatorio su un piano inclinato (nell'Esempio E5.2)** in relazione al §4.4a (semplice traslazione sul piano inclinato): come quello a cui si fa riferimento.

## 5.6 ELASTICITÀ E LEGGE DI HOOKE

Abbiamo finora considerato corpi rigidi, cioè non deformabili. In natura tuttavia i corpi sono tutti **deformabili**, alcuni in modo quasi impercettibile, altri invece presentano deformazioni rilevanti anche per piccole forze applicate. Un corpo solido si definisce **elastico** se riprende la sua forma originale una volta rimosse le cause che lo hanno deformato. Al contrario, si dice **plastico** qualora la deformazione permanga nel tempo, anche eliminandone le cause. In natura tutti i

corpi possono essere considerati elastici purché la deformazione sia sufficientemente piccola. Per i corpi elastici si riscontra sperimentalmente una proporzionalità fra la forza applicata e la deformazione (allungamento o compressione) (4.16) Questa legge, conosciuta come *legge di Hooke*, è già stata utilizzata nel §4.2e, nello studio del moto armonico di un punto materiale sottoposto ad una forza di richiamo.

La legge di Hooke, quando la deformazione consiste nell'allungamento di un corpo (Figura 5.12), si scrive:

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta \ell}{\ell}, \quad (5.17)$$

dove  $F$  è il modulo della forza applicata,  $A$  l'area della sezione del corpo,  $\Delta \ell$  l'allungamento ed  $\ell$  la sua lunghezza iniziale. La costante  $E$ , chiamata *modulo di elasticità di Young*, si misura nel S.I. in  $\text{N m}^{-2}$ ; essa dipende dal materiale che costituisce il corpo ed è tanto maggiore quanto meno il corpo è deformabile. Nella Tabella 5.2 sono riportati i moduli di Young per vari materiali.

**Tabella 5.2** Modulo di Young per diversi materiali

MATERIALE	$E$ ( $\text{N m}^{-2}$ )	MATERIALE	$E$ ( $\text{N m}^{-2}$ )
acciaio	$2 \cdot 10^{11}$	legno duro	$1 \cdot 10^{10}$
vetro	$7 \cdot 10^{10}$	tendine	$2 \cdot 10^7$
mattone	$2 \cdot 10^{10}$	cartilagine (coste)	$1.2 \cdot 10^7$
ossa (lungo l'asse) trazione	$1.8 \cdot 10^{10}$	gomma	$1 \cdot 10^6$
ossa (lungo l'asse) compressione	$0.9 \cdot 10^{10}$	vasi sanguigni	$2 \cdot 10^5$

Il rapporto  $F/A \equiv \sigma$  prende il nome di *sfuerzo (stress)* mentre l'allungamento relativo  $\Delta \ell / \ell \equiv \varepsilon$  quello di *stiramento (strain)*, per cui la (5.17) assume anche la forma:

$$\sigma = E \varepsilon. \quad (5.18)$$

La legge di Hooke può essere scritta anche per deformazioni di volume o di membrane. Essa assume per i volumi la forma:

$$\Delta p = -K \frac{\Delta V}{V}, \quad (5.19)$$

dove  $\Delta p$  è la variazione di pressione subita dal corpo di volume  $V$ ,  $K$  è chiamato *modulo di compressione* e dove il segno meno sta a indicare che a un aumento di pressione corrisponde una diminuzione di volume  $\Delta V$ .

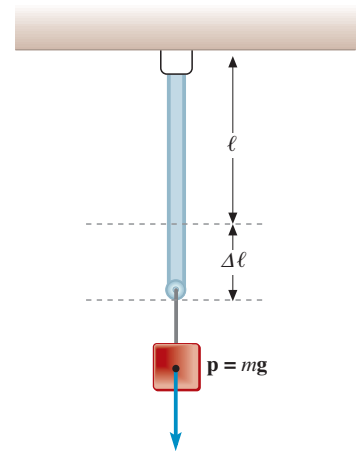
Nel caso delle membrane la legge di Hooke si scrive:

$$\frac{F}{\ell} = k \frac{\Delta S}{S}, \quad (5.20)$$

dove  $F/\ell$  è la forza applicata per unità di lunghezza del contorno  $\ell$  della membrana,  $S$  la superficie iniziale della membrana e  $k$  la costante elastica della membrana.

## 5.7 LE FORZE DI ATTRITO

Le *forze di attrito* tra i corpi hanno l'effetto di impedire il loro moto reciproco. In particolare tali forze si esplicano a livello atomico e molecolare con una miriade



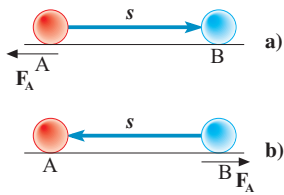
**Figura 5.12**

La forza applicata (sotto forma di forza peso  $\mathbf{p}$ ) allunga l'asta la cui lunghezza passa dal valore iniziale  $\ell$  al valore finale  $\ell + \Delta \ell$ . Se il materiale dell'asta si comporta in modo elastico, l'allungamento è proporzionale alla forza applicata.

Deformazione di lunghezza

Deformazione volumetrica

Deformazione di superficie

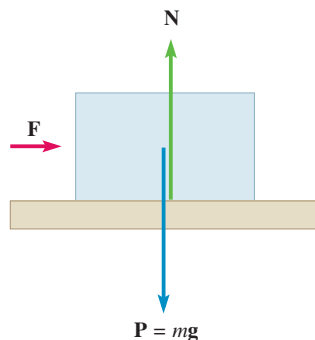


**Figura 5.13**

(a) Un corpo striscia da A a B percorrendo un tratto  $s$ . La forza d'attrito  $F_A$  compie un lavoro resistente dato da  $L_{AB} = -F_A s$ .

In (b) il corpo è strisciato da B ad A e la forza d'attrito (che si oppone sempre al moto) compie un lavoro  $L_{BA} = -F_A s$ . Il lavoro totale lungo la traiettoria chiusa da A a B e di ritorno ad A è  $L_{chiusa} = -2 F_A s$ , certamente diverso da zero (essendo comunque  $F_A \neq 0$  e  $s \neq 0$ ): la forza d'attrito **non è conservativa**.

#### Forze di attrito statico e di attrito cinetico



**Figura 5.14**

Quando aumenta la forza normale alle superfici di contatto, aumenta in modo proporzionale il contatto microscopico tra le superfici e quindi cresce la forza di attrito che è necessario superare per mettere in moto il blocco.

di interazioni tra i livelli energetici degli orbitali (Capitolo 28: Materia e radiazioni) e tra i materiali a contatto.

Dal punto di vista macroscopico, le forze di attrito hanno la caratteristica di **opporsi** al moto del corpo e in generale possono essere espresse dalla relazione:

$$F_A = -f v, \quad (5.21)$$

dove il segno meno rappresenta il fatto che queste forze si oppongono al moto del corpo e dove  $f$  è un coefficiente, di solito assai complesso, che dipende dalla geometria del corpo, dalle caratteristiche fisiche sue e del mezzo in cui si muove. Dalla Figura 5.13 risulta evidente che le forze di attrito **non sono conservative** (sono **dissipative**).

In generale si distinguono due tipi di forze d'attrito. Per mettere in moto un corpo, appoggiato su un piano, è necessario applicare al corpo una forza  $F$  superiore alla **forza di attrito statico**  $F_{as}$ , la quale è proporzionale al modulo della reazione vincolare  $N$  subita dal corpo a causa del proprio peso  $P$  (Figura 5.14):

$$F \geq F_{as} = \mu_s N, \quad (5.22)$$

e  $\mu_s$  è chiamato coefficiente di attrito statico e dipende dalla natura delle superfici di contatto tra corpo e piano d'appoggio. Quando il corpo è in moto e striscia sul piano, la forza di attrito che si oppone al moto diminuisce, pur restando proporzionale a  $N$  (**forza di attrito dinamico o cinetico**):

$$F_{ac} = \mu_c N, \quad (5.23)$$

dove  $\mu_c$  è il coefficiente di attrito cinetico con  $\mu_c < \mu_s$ : ci vuole infatti più forza per far partire una slitta che per mantenerla in moto.

Per provocare il moto è necessario che il modulo della forza agente  $F$  sia superiore alla forza di attrito statico. Per mantenere lo stato di moto è necessario che la forza agente  $F$  sia superiore o uguale alla forza di attrito dinamico.

È interessante considerare in che modo è possibile misurare il coefficiente di attrito statico  $\mu_s$ . Riprendiamo il moto di un solido sul piano inclinato riportato nel §4.4 nel caso in cui gli attriti non siano trascurabili, l'accelerazione viene calcolata tenendo conto della componente perpendicolare al piano inclinato, responsabile dell'attrito statico:  $a_{\perp} = \mu_s g \cos\theta$  e quindi l'accelerazione complessiva (vedi la (4.42) in assenza di attrito) risulta:

$$a = g (\sin\theta - \mu_s \cos\theta). \quad (5.24)$$

In condizione di equilibrio  $a = 0$  e quindi

$$\sin\theta - \mu_s \cos\theta = 0 \quad \text{da cui} \quad \mu_s = \tan\theta.$$

Sfruttando il piano inclinato si può determinare il coefficiente d'attrito statico tra il particolare corpo e il piano semplicemente misurando l'angolo  $\theta$  oltre il quale il corpo inizia a scendere lungo di esso.

**ESEMPIO 5.2** Forze di attrito su un'autovettura in curva

A quale velocità massima un'autovettura, di massa  $m = 1500$  kg, può affrontare in una strada piana una curva avente raggio  $r = 40$  metri. Si assuma il coefficiente di attrito statico  $\mu_s = 0.5$ .

**Soluzione** L'autovettura si muove in curva di moto circolare uniforme con velocità periferica  $v$  e quindi è soggetta ad una forza centrifuga controbilanciata dalla forza centripeta dovuta all'attrito tra pneumatici e asfalto. La traiettoria è un arco di circonferenza di raggio  $r$  senza spostamento lungo  $r$  e il coefficiente di attrito rilevante per questo caso è quello statico  $\mu_s$  dato dalla (5.22), dove  $N$  è la forza peso dell'autovettura:

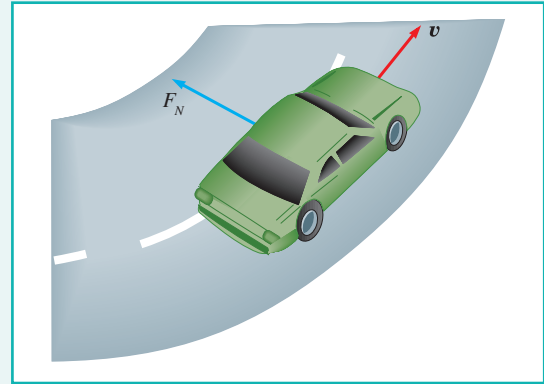
$$N = m g.$$

L'accelerazione centrifuga è data dalla (3.13)  $a = v^2/r$ , per cui il massimo di velocità si avrà all'equilibrio:

$$\mu_s m g = m v^2/r,$$

da cui abbiamo:

$$v = \mu_s g r = 0.5 \cdot 9.8 \text{ m s}^{-2} \cdot 40 \text{ m} = 14 \text{ m s}^{-1} = 50.4 \text{ km/h}.$$



**Figura 5.15**

Autovettura in curva.

Nel caso di un treno su rotaie in curva, la forza centripeta è fornita dal sistema che tiene fisse le rotaie.

**RIEPILOGO DELLE GRANDEZZE FISICHE E UNITÀ DI MISURA**

	<b>Sistema Internazionale</b>	<b>Sistema C.G.S.</b>	<b>Sistema pratico</b>
momento di una forza $M$	newton metro (N m)	dyna centimetro (dyn cm)	—
momento angolare $\ell, L$	$\text{m}^2 \text{kg s}^{-1}$	$\text{cm}^2 \text{g s}^{-1}$	—
guadagno meccanico $G$	<i>grandezza priva di dimensioni</i>		
momento d'inerzia $I$	$\text{kg m}^2$	$\text{g cm}^2$	—
angolo $\theta$	radianti	radianti	gradi sessagesimali
velocità angolare $\omega$	radianti $\text{s}^{-1}$	radianti $\text{s}^{-1}$	gradi $\text{s}^{-1}$
accelerazione angolare $\alpha$	radianti $\text{s}^{-2}$	radianti $\text{s}^{-2}$	gradi $\text{s}^{-2}$
modulo di elasticità di Young $E$	$\text{N m}^{-2}$	dyna $\text{cm}^{-2}$	—
modulo di compressione $K$	$\text{N m}^{-2}$	dyna $\text{cm}^{-2}$	—
costante elastica di membrana $k$	$\text{N m}^{-2}$	dyna $\text{cm}^{-2}$	—
sforzamento (stress) $\sigma$	$\text{N m}^{-2}$	dyna $\text{cm}^{-1}$	—
stiramento (strain) $\varepsilon$	<i>grandezza priva di dimensioni</i>		
coefficiente di attrito statico $\mu_s$	<i>grandezza priva di dimensioni</i>		
coefficiente di attrito cinetico $\mu_c$	<i>grandezza priva di dimensioni</i>		

**PROBLEMI**

- 5.1 Un disco metallico A ruota liberamente intorno all'asse verticale passante per il suo centro, compiendo 2400 giri al minuto. Un secondo disco B, il cui momento d'inerzia è nove volte quello del disco A, è disposto sullo stesso asse fermo ad una certa distanza sopra il disco A. Il disco B viene lasciato cadere su A, dopo di che i due dischi ruotano insieme con la stessa velocità angolare. Qual è il valore della velocità angolare comune ai due dischi?
- 5.2 Il centro di una noce inserita in uno schiaccianoci dista dal fulcro 40 mm; se l'attrezzo è impugnato in modo che il centro del palmo della mano sia a 14 cm dal fulcro, qual è il guadagno meccanico che ne risulta?
- 5.3 In una bilancia a bracci disuguali un corpo di peso  $p_1 = 10.48$  grammi viene equilibrato da un peso  $p_2 = 9.95$  grammi. Calcolare il rapporto fra le lunghezze dei due bracci.
- 5.4 Un soggetto di 80 kg di massa si trova sul bordo di una piattaforma circolare e omogenea di massa pari a 150 kg con un diametro di 8 m, libera di ruotare intorno al proprio centro. L'uomo, da fermo ma solidale con la piattaforma, lancia tangenzialmente un corpo di massa di 1.5 kg alla velocità di  $25 \text{ m s}^{-1}$  relativa al suolo. Calcolare la conseguente velocità angolare dell'uomo e della piattaforma.
- 5.5 Un operaio pone una leva lunga 2.5 m sotto un masso pesante 300 kg. Il fulcro della leva si trova a 0.2 m dal punto in cui la leva tocca il masso. Calcolare la forza necessaria a sollevare la roccia.
- 5.6 Individuare il centro di massa del pezzo meccanico costituito da un disco del diametro di 5 cm e alto 2 cm unito ad una sbarra cilindrica di raggio 1 cm e lunga 15 cm costituita da un materiale omogeneo con l'asse passante per il centro del disco.
- 5.7 Un'auto con il suo guidatore ha una massa di 1400 kg. Da una velocità di 25 m/s l'auto frena fino ad arrestarsi in 180 metri. Valutare la forza totale di attrito tra strada e pneumatici (nell'ipotesi che tale forza sia costante). La frenata avviene senza slittamento delle ruote.
- 5.8 Un righello di un metro, appeso ad un estremo, oscilla come un pendolo reale. Determinare il suo periodo di oscillazione. Quale dovrebbe essere la lunghezza di un pendolo semplice con lo stesso periodo?



# Semestre Filtro 2026-2027

D. Scannicchio

# Fisica Generale e Biomedica

Manuale conforme al Syllabus  
per il semestre filtro 2026-2027

## Nel volume trovi strumenti utili per studiare meglio

Accedi ai **contenuti digitali** e alle risorse pensate per supportarti  
nella preparazione al **semestre filtro**.



**Eddie,**  
l'assistente virtuale  
per sintesi e quiz



**APP EXAM MANAGER**  
con migliaia  
di quiz di Fisica



Versione  
**Ebook**

Le risorse digitali sono accessibili tramite il **codice personale** presente nel volume.  
Attivazione online. Servizio gratuito con validità di **18 mesi**.

**EdiSES**  
EDIZIONI

