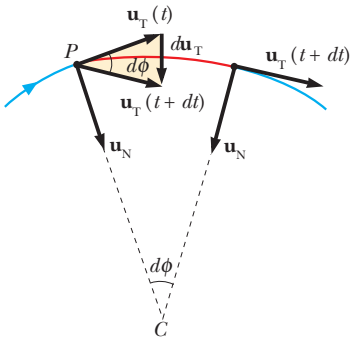

Figura 1.18 Variazione $d\mathbf{u}_T$ del versore tangenziale durante uno spostamento infinitesimo e schema per la determinazione dell'accelerazione normale.

zione del versore tangente $d\mathbf{u}_T$ è ortogonale a $\mathbf{u}_T$ stesso, in quanto nel triangolo evidenziato l'angolo $d\phi$ tende a zero, e ha modulo $du_T = d\phi$. Quindi $d\mathbf{u}_T = d\phi\ \mathbf{u}_N$, dove $\mathbf{u}_N$ è il versore ortogonale a $\mathbf{u}_T$ e diretto verso la concavità della traiettoria. Si ha che $d\mathbf{u}_T/dt = d\phi/dt\ \mathbf{u}_N$, che conduce alla formula data per $\boldsymbol{a}$, in cui il primo componente, tangente alla traiettoria e quindi parallelo alla velocità, esprime la variazione del modulo della velocità e il secondo componente, ortogonale alla velocità, è legato alla variazione della direzione del moto. Per semplificare ulteriormente l'espressione di $\boldsymbol{a}$, notiamo che, per dt infinitesimi, le rette normali alla traiettoria in due punti prossimi tra loro si incontrano in C, centro della circonferenza tangente alla traiettoria in P (circonferenza osculatrice). C viene detto centro di curvatura della traiettoria in P. L'arco di traiettoria ha lunghezza $ds = R\ d\phi$, con $R = CP$ **raggio di curvatura**. Al variare della posizione P lungo la traiettoria variano sia il valore di R che la posizione di C, che può passare da una parte all'altra della curva come in figura 1.17 e diventare infinito nei tratti rettilinei. Pertanto

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}v$$

e sostituendo nell'espressione dell'accelerazione trovata

$$\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N = \boldsymbol{a}_T + \boldsymbol{a}_N \ , \tag{1.22}$$

in modulo

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}} \ .$$

Accelerazione tangenziale
Accelerazione centripeta

I due componenti, mostrati in figura 1.18, si chiamano **accelerazione tangenziale** e **accelerazione normale** o **centripeta** (perché diretta sempre verso il centro di curvatura).

In un moto curvilineo vario, entrambi i componenti sono generalmente diversi da zero. Se tuttavia nel moto curvilineo la velocità scalare è costante, condizione che viene per motivi storici indicata come moto curvilineo uniforme, allora $a_T = 0$. Se invece il moto è rettilineo vario allora $a_N = 0$. Solo nel moto rettilineo uniforme $a_T = a_N = 0$. In altre parole con $a_T \neq 0$ il moto è sempre vario, con $a_N \neq 0$ è sempre curvilineo.

Le proprietà discusse finora non hanno bisogno del supporto di un sistema di riferimento (sono invarianti). Determiniamo adesso le componenti cartesiane e polari dell'accelerazione, come fatto per la velocità.

Componenti cartesiane dell'accelerazione

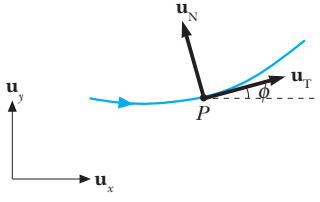

Figura 1.19 Relazione di orientazione tra i versori del sistema Oxy e quelli tangenziale e normale riferiti alla traiettoria nel piano.

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono le accelerazioni dei due moti rettilinei delle proiezioni sugli assi di P:

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\mathbf{u}_x + \frac{dv_y}{dt}\mathbf{u}_y = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{u}_y = a_x\mathbf{u}_x + a_y\mathbf{u}_y \ .$$

Se ϕ è l'angolo che $\mathbf{u}_T$ forma con l'asse x, si deduce ad esempio nel caso della figura 1.19 che:

$$a_x = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{u}_x = \left(\frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N\right)\cdot\mathbf{u}_x = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T\cdot\mathbf{u}_x + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N\cdot\mathbf{u}_x = \frac{dv}{dt}\cos\phi - \frac{v^2}{R}\operatorname{sen}\phi$$

$$a_y = \boldsymbol{a}\cdot\mathbf{u}_y = \left(\frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N\right)\cdot\mathbf{u}_y = \frac{dv}{dt}\mathbf{u}_T\cdot\mathbf{u}_y + \frac{v^2}{R}\mathbf{u}_N\cdot\mathbf{u}_y = \frac{dv}{dt}\operatorname{sen}\phi + \frac{v^2}{R}\cos\phi$$

Note le componenti tangenziale e centripeta si ricavano subito quelle cartesiane e viceversa, basta risolvere il sistema lineare nelle incognite dv/dt e v^2/R.

ERRATA-CORRIGE del 20 novembre 2023

Mazzoldi, Nigro, Voci, Atzeni, Michelotti - FISICA – Meccanica e termodinamica

1) Pagina 51, Esempio 2.7

Nelle due ultime formule riportate nella soluzione → Cambiare " F " in " F_{est} " (est a pedice)

2) Pagina 284, Esempio 9.3

Nell'ultima formula (che era sbagliata) → Cambiare " $\rho_l = \rho \frac{V_S}{V} = \rho \frac{h_S}{h}$ " in "$\rho_l = \rho \frac{V}{V_S} = \rho \frac{h}{h_S}$ "

3) Pag 467, Didascalia **Figura 14.32**: Calore specifico molare dell'idrogeno gassoso a volume costante in funzione della temperatura.

4) Pag D.577, risposta all'esercizio 2.10 : $a = (m_1 - \mu m_2)\, g \,/\, (m_1 + m_2)$

5) Pagina D.584, Soluzione Esercizio 5.4

Nell'ultima riga della soluzione → Sostituire l'ultima formula

con " $\Delta h_1(t_s) = \Delta x_{CM}(t_s) = 1.73\ m$ "

6) Pagina D.601, soluzione Esercizio 14.16

Nell'ultima riga della soluzione → Cambiare " h " in " η " (eta lettera greca)

ERRATA-CORRIGE del 10 feb 2025

Mazzoldi, Nigro, Voci, Atzeni, Michelotti - FISICA – Meccanica e termodinamica

Correzioni richieste da F. Michelotti

1) Pagina 157, Soluzione Esempio 5.12

Prima dell'ultima formula correggere il testo

da " ….. tenendo appunto conto che nel prodotto scalare cos θ = +1 "

a " ….. tenendo appunto conto che nel prodotto scalare **cos θ = -1** "

Correggere la prima parte della formula che segue nel testo

da $W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = 2 \int_{r_1}^{r_2} m \frac{\omega_1^2 r_1^4}{r^4} r dr = \cdots$

a $W = \int_{r_1}^{r_2} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{-2} \int_{r_1}^{r_2} m \frac{\omega_1^2 r_1^4}{r^4} r dr = \cdots$

2) Pagina D579, Soluzione problema 2.38

Correggere l'ultimo risultato da 3.28 N a **8.38 N**

3) Pagina 72

Modificare il testo delle due righe evidenziate che precedono l'equazione (2.17)

Da "La funzione delle coordinate E_p si chiama …"

A "La funzione E_p, che dipende solo dalle coordinate, si chiama…"

4) Pagina 186, Esempio 6.3

Modificare l'ultima formula

da "$E_m = -\gamma \frac{mM}{2} < 0$"

a "$E_m = -\gamma \frac{mM}{2\boldsymbol{r}} < 0$"

5) Pagina 519, Testo del problema 15.37.

Nella seconda riga correggere il secondo dato:

da " $(V_B = 2 \cdot 10^{-2}\ m^3)$ "

a " $(V_B = \mathbf{1.5} \cdot 10^{-2}\ m^3)$ "

6) Pagina D.607, Soluzione del problema 15.37

Prima riga	→	correggere da	"$p_B = 0.5\ bar$"	a	"$p_B = \mathbf{1.0}\ bar$"
Seconda riga	→	correggere da	"$T_B = 120.3\ K$"	a	"$T_B = \mathbf{180.4}\ K$"
	→	correggere da	"$V_C = 1.73 \cdot 10^{-2} m^3$"	a	"$V_C = \mathbf{1.22} \cdot 10^{-2} m^3$"
Terza riga	→	correggere da	"$T_C = 104.2\ K$"	a	"$T_C = \mathbf{146.7}\ K$"
Quarta riga	→	correggere da	"$W_{AB} = 10^3 J$"	a	"$W_{AB} = \mathbf{625}\ J$"
		correggere da	"$\Delta U_{AB} = -750\ J$"	a	"$\Delta U_{AB} = \mathbf{0}\ J$"
		correggere da	"$Q_{AB} = 250\ J$"	a	"$Q_{AB} = \mathbf{625}\ J$"
Quinta riga	→	correggere da	"$W_{BC} = -134\ J$"	a	"$W_{BC} = \mathbf{-280}\ J$"
		correggere da	"$Q_{BC} = -335\ J$"	a	"$Q_{BC} = \mathbf{-700}\ J$"
Sesta riga	→	correggere da	"$W_{CA} = -633\ J$"	a	"$W_{CA} = \mathbf{-270}\ J$"
		correggere da	"$\Delta U_{CA} = 950\ J$"	a	"$\Delta U_{CA} = \mathbf{420}\ J$"
Settima riga	→	correggere da	"$Q_{CA} = 317\ J$"	a	"$Q_{CA} = \mathbf{150}\ J$"
		correggere da	"$Q_{tot} = W_{tot} = 233\ J$"	a	"$Q_{tot} = W_{tot} = \mathbf{75}\ J$"
		correggere da	"$\eta = 0.41$"	a	"$\eta = \mathbf{0.097 = 9.7\%}$"
Ottava riga	→	correggere da	"$\Delta S_u = 0.22\ J/K$"	a	"$\Delta S_u = \mathbf{0.47}\ J/K$"

NOTA ALLE ERRATA CORRIGE 5 E 6

Scambi di calore lungo le trasformazioni reversibili rettilinee di un gas ideale

Negli esercizi di termodinamica accade frequentemente che venga chiesto di calcolare il lavoro e il calore scambiato da un gas ideale lungo una trasformazione reversibile rettilinea nel piano pV, in cui la pressione dipende linearmente dal volume $p = mV + q$, con m e q parametri arbitrari. La situazione è descritta in Figura 1, in cui la trasformazione lineare avviene tra due stati di equilibrio A e B noti. Solitamente il lavoro W_{AB} viene ricavato calcolando l'area del trapezio sottostante la porzione AB di trasformazione lineare. Il calore Q_{AB} viene poi ricavato facendo uso del primo principio della termodinamica $Q_{AB} = \Delta U_{AB} + W_{AB} = nC_V \Delta T_{AB} + W_{AB}$, con C_V che dipenderà dal particolare tipo di gas ideale preso in considerazione.

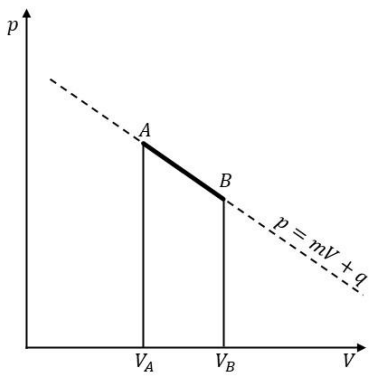

Figura 1

Tale approccio è sempre corretto solo se ci si limita al calcolo di calore e lavoro <u>complessivi</u> scambiati lungo la trasformazione AB. Occorre tuttavia notare che può accadere che lungo parte della trasformazione AB il calore scambiato sia positivo e che sia negativo lungo la restante parte, pur rimanendo valido il fatto che il calore complessivamente scambiato sia calcolabile con la procedura riportata nel paragrafo precedente. La situazione è schematizzata nella figura 2.

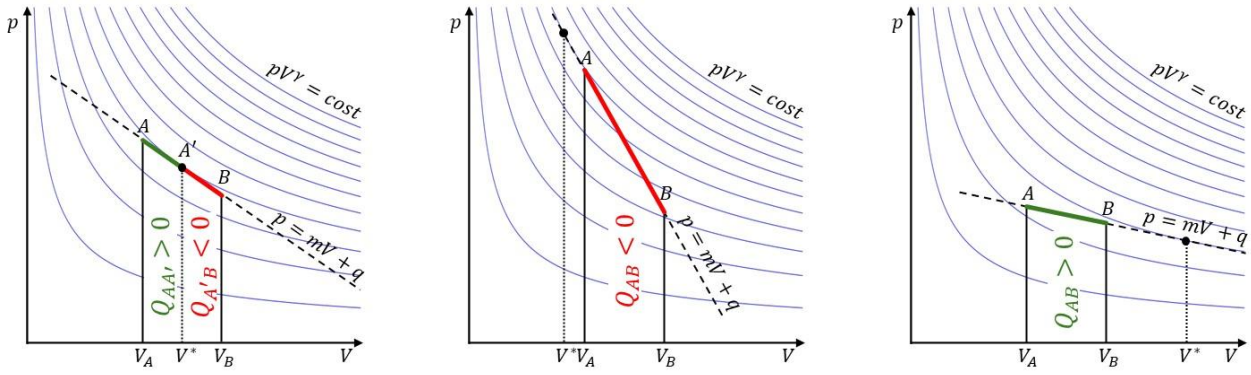

Figura 2

Se la trasformazione lineare ha un punto di tangenza in V^* ad un' adiabatica che cade all'interno dell'intervallo AB, Figura 2 (sinistra), allora nella porzione AA' il calore sarà assorbito $Q_{AA'} > 0$, mentre nella porzione $A'B$ sarà ceduto $Q_{A'B} < 0$, pur rimanendo $Q_{AB} = Q_{AA'} + Q_{A'B} = nC_V\Delta T_{AB} + W_{AB}$. Se il punto di tangenza si ha per V^* fuori dall'intervallo AB allore il calore scambiato potrà essere sempre negativo o sempre positivo a seconda che in V^* cada a sinistra o a destra dell'intervallo in AB, rispettivamente, Figura 2 (centro e destra). Il valore di V^* è determinato dalle caratteristiche del gas e dai parametri della trasformazione lineare. Si ha in $V^* = -\frac{q}{m}\frac{C_p}{C_p+C_V}$.

La questione è particolarmente importante quando la trasformazione rettilinea AB fa parte di un ciclo, Figura 3, per il quale si chiede di calcolare il rendimento. In questo caso infatti può accadere che si debba considerare $Q_{A'B} < 0$ tra i calori ceduti e $Q_{AA'} > 0$ tra quelli assorbiti. Evidentemente, non considerare tale possibilità può condurre ad un errore nel calcolo del rendimento.

Infine, si rimarca che la questione si pone nel caso $m < 0$. Si può mostrare che per $m \geq 0$ è sempre $Q > 0$ lungo qualsiasi tratto della trasformazione rettilinea AB.

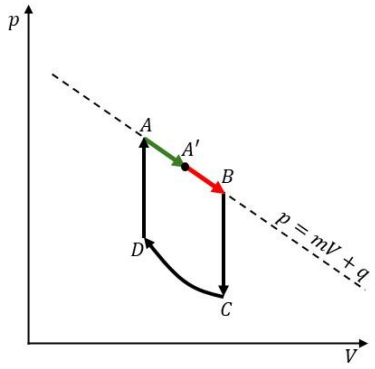

Figura 3

Dimostrazioni

Calcoliamo la derivata del calore scambiato lungo la trasformazione reversibile rettilinea tra A e B:

$$\frac{dQ}{dV} = \frac{dU+dW}{dV} = \frac{nC_V dT + pdV}{dV} = nC_V\frac{dT}{dV} + p$$

Dall'equazione di stato dei gas ideali si ricava:

$$pV = nRT \qquad pdV + Vdp = nRdT \qquad \frac{dT}{dV} = \frac{1}{nR}\left(p + V\frac{dp}{dV}\right) = \frac{1}{nR}(p + mV) = \frac{1}{nR}(2mV + q).$$

Sostituendo si ha:

$$\frac{dQ}{dV} = nC_V\frac{1}{nR}(2mV + q) + mV + q = \frac{1}{R}\left[mV\left(C_p + C_V\right) + qC_p\right]$$

Imponiamo la condizione $\frac{dQ}{dV} \geq 0$ per cercare il segno della derivata prima. Si ha:

$$mV\left(C_p + C_V\right) + qC_p \geq 0 \qquad -|m|V\left(C_p + C_V\right) + qC_p \geq 0$$ essendo m negativo

e $\quad V \leq \frac{qC_p}{|m|(C_p+C_V)} \qquad V \leq -\frac{q}{m}\frac{C_p}{(C_p+C_V)}$.

Con riferimento alla Figura 2, si identifica quindi un volume caratteristico di soglia $V^* = -\frac{q}{m}\frac{C_p}{(C_p+C_V)}$ tale che:

- per $V < V^*$ (tratto AA') il sistema assorbe calore ($dQ > 0$) in una espansione in cui $dV > 0$;
- per $V > V^*$ (tratto $A'B$) il sistema cede calore ($dQ < 0$) in una espansione in cui $dV > 0$;
- per $V \sim V^*$ (punto nero) il sistema non scambia calore, la trasformazione rettilinea è un tratto di adiabatica.

L'ultima considerazione porta ad una dimostrazione alternativa. Possiamo infatti cercare il valore V^* in cui la trasformazione reversibile rettilinea $p = mV + q$ è tangente ad un'adiabatica reversibile $pV^\gamma = cost$. Imponendo l'uguaglianza delle funzioni e delle derivate in V^* si ha:

$\begin{cases} mV^* + q = cost\ V^{*-\gamma} \\ m = -cost\ \gamma\ V^{*-(\gamma+1)} \end{cases}$, $-cost\ \gamma V^{*-\gamma} + q = cost\ V^{*-\gamma}$ e $\frac{q}{\gamma+1} = cost\ V^{*-\gamma} = mV^* + q$

Dall'ultima uguaglianza si ottiene:

$V^* = -\frac{q}{m}\frac{\gamma}{\gamma+1} = -\frac{q}{m}\frac{C_p}{(C_p+C_V)}$ come ricavato già sopra.

Si noti che se $m \in (0, \infty)$ allora $V^* \in (-\infty, 0)$ e la condizione che il calore scambiato sia sempre positivo è automaticamente verificata.

CONSEGUENZA PER IL PROBLEMA 15.37 – Nel caso del problema, sia ha $V^* = 1.56 \cdot 10^{-2}\ m^3$, valore che cade proprio nell'intervallo di valori tra $V_A = 10^{-2}\ m^3$ e $V_B = 2 \cdot 10^{-2}\ m^3$ proposti nella formulazione originale del problema. Per tale motivo si è deciso di modificare $V_B = 1.5 \cdot 10^{-2}\ m^3$ nel testo, in modo che V^* sia fuori dall'intervallo e che non si creino problemi per il calcolo del rendimento.